# 25. Algorithmus der Woche
# Das Sieb des Eratosthenes
## Wie schnell kann man alle Primzahlen bis eine Milliarde berechnen?

**Autor**
Rolf H. Möhring, TU Berlin
Martin Oellrich, TU Berlin

Eine **Primzahl** ist eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass sie durch keine andere natürliche Zahl außer 1 und sich selbst ohne Rest teilbar ist. Primzahlen sind in der Menge aller natürlichen Zahlen unregelmäßig verteilt und haben dadurch Mathematiker seit tausenden von Jahren fasziniert und beschäftigt.

Eine **Primzahlentabelle bis n** ist eine Liste aller Primzahlen zwischen den Zahlen 1 und $n$. Sie beginnt folgendermaßen:

$$2 \;\; 3 \;\; 5 \;\; 7 \;\; 11 \;\; 13 \;\; 17 \;\; 19 \;\; 23 \;\; 29 \;\; 31 \;\; 37 \;\; 41 \;\; \ldots$$

Im Laufe der Zeit sind viele Problemstellungen gefunden worden, in denen Primzahlen eine Rolle spielen. Nicht alle konnten bisher restlos geklärt werden. Hier zwei Beispiele.

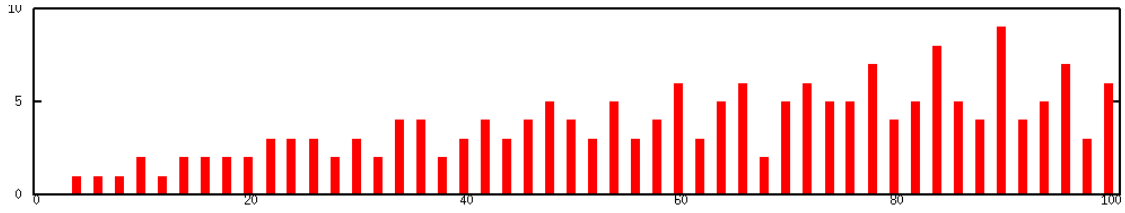
*Christian Goldbach* (1694–1764) formulierte 1742 eine interessante Beobachtung:

> *Jede gerade Zahl größer oder gleich 4 ist darstellbar als Summe zweier Primzahlen.*

Beispielsweise finden wir:

$$4 = 2+2, \quad 6 = 3+3, \quad 8 = 3+5, \quad 10 = 3+7 = 5+5, \quad \text{etc.}$$

Diese Behauptung verlangt nur, dass es mindestens eine solche Darstellung gibt. Tatsächlich gibt es für die meisten Zahlen sogar mehrere. Das folgende Diagramm wurde mit Hilfe einer Primzahltabelle erstellt und zeigt die Anzahlen solcher Darstellungsmöglichkeiten. Auf der $x$-Achse stehen die zerlegten (geraden) Zahlen.

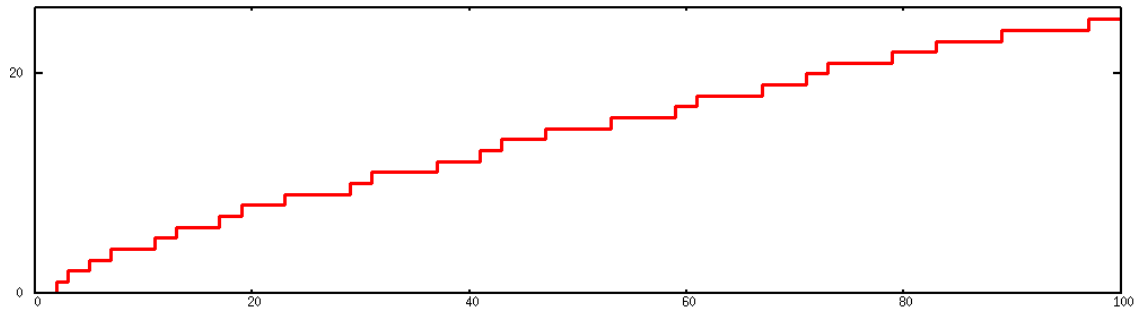



Der leichte Aufwärtstrend in den Säulen setzt sich bei wachsendem $n$ immer weiter fort und es wurde keine gerade Zahl gefunden, für die diese Behauptung nicht gilt. Dennoch konnte bis heute kein Beweis gefunden werden, dass sie *für alle* gilt.

*Carl Friedrich Gauß* (1777–1855) untersuchte die Verteilung der Primzahlen, indem er sie zählte. Er betrachtete die Funktion

$$\pi(n) := \text{ Anzahl aller Primzahlen zwischen 1 und } n \;\; .$$

Ein Diagramm dieser Funktion sieht so aus:




Man nennt $\pi(n)$ aus offensichtlichen Gründen eine *Treppenfunktion*. Gauß konstruierte dazu eine „glatte“ Kurve, die so nah wie möglich bei $\pi(n)$ bleibt, egal wie groß $n$ wird. Um sich ein Bild von seinem Vorhaben zu machen und sein Ergebnis später zu kontrollieren brauchte er eine Primzahltabelle.

(Dieses Problem ist seitdem gelöst, ein tieferes Eingehen würde jedoch den Rahmen sprengen.)

Heute sind Primzahlen nicht mehr nur eine Herausforderung für Mathematiker, sondern von ganz praktischem Wert. So spielen etwa 100-stellige Primzahlen in der elektronischen Verschlüsselung von Daten eine zentrale Rolle.

## Von der Idee zum Verfahren

Soweit wir heute wissen, hat ein Grieche den ersten Algorithmus zur Berechnung von Primzahltabellen vorgestellt: **Eratosthenes von Kyrene** (ca. 276–194 v. Chr.). Er war ein hochrangiger Gelehrter im antiken Alexandria und ein Leiter der berühmten Bibliothek, in der das gesamte Wissen der damaligen Zeit gesammelt war. Er arbeitete mit an den damals wesentlichen Fragen der Astronomie, Geologie und Mathematik: Welchen Umfang hat die Erde? Woher kommt der Nil? Wie kann man aus einem Würfel einen zweiten konstruieren, der das doppelte Volumen hat?

Wir wollen im Weiteren nachvollziehen, wie er aus einer einfachen Grundidee ein praktikables Verfahren entwickelt hat, das schon zu seiner Zeit gut auf Papyrus oder Sand auszuführen war. Dabei wollen wir untersuchen, wie schnell dieser Algorithmus in der Praxis ist, wenn wir eine recht große Primzahltabelle berechnen wollen. Nehmen wir als Maßstab für „groß“ die Zahl *eine Milliarde*, also $n = 10^9$.

## Eine einfache Idee

Gemäß der Definition von Primzahlen gilt für jede Zahl $m$, die *keine* Primzahl ist: es gibt zwei Zahlen $i, k$ mit den Eigenschaften $2 \leq i,k \leq m$ und $i \cdot k = m$. Diese Gesetzmäßigkeit können wir benutzen, um einen sehr einfachen Algorithmus für eine Primzahltabelle zu formulieren:

**Primzahltabelle (Grundidee)**
schreibe alle Zahlen von 2 bis $n$ in eine Liste
bilde alle Produkte $i \cdot k$, wobei $i$ und $k$ Zahlen zwischen 2 und $n$ sind
streiche alle Ergebnisse, die vorkommen, aus der Liste.

Dass diese einfache Vorschrift das Gewünschte leistet, ist sofort zu sehen: alle Zahlen, die am Schluss noch in der Liste stehen, kamen nicht als Produktergebnis vor. Sie können also nicht als ein solches Produkt geschrieben werden und sind demnach Primzahlen.

## Wie schnell läuft die Berechnung?

Um nun zu untersuchen, was der Algorithmus an welcher Stelle genau tut, schreiben wir die in der Grundidee enthaltenen Handlungsvorschriften etwas formaler und geben den Zeilen Nummern:

```
PRIMZAHLTABELLE_GRUNDVERSION
1  schreibe alle Zahlen von 2 bis n in eine Liste
2  für jede Zahl i := 2...n führe aus:
3      für jede Zahl k := 2...n führe aus:
4          streiche die Zahl i·k aus der Liste
```

Steht bei Ausführung von Schritt 4 die Zahl $i \cdot k$ nicht in der Liste, so passiert nichts.

Dieser Algorithmus kann ohne Schwierigkeiten auf einem Computer programmiert werden und wir können seinen Zeitverbrauch untersuchen. Auf einem LINUX PC (3.2 GHz) ergeben sich folgende Laufzeiten:

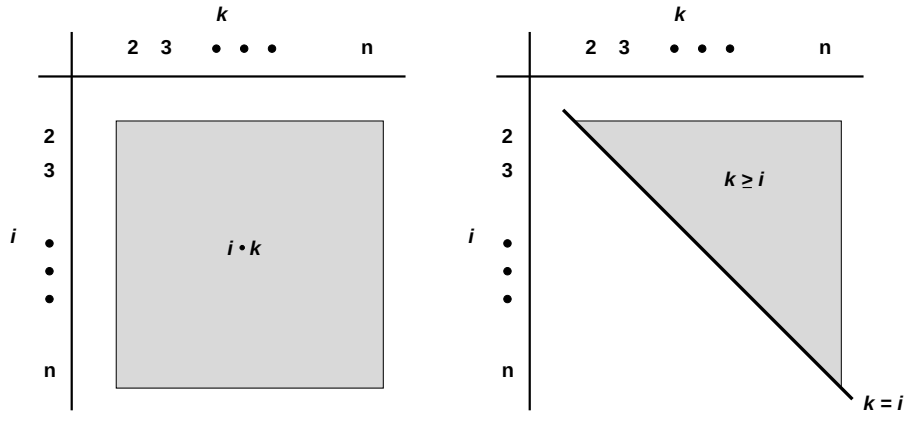
| $n$ | $10^3$ | $10^4$ | $10^5$ | $10^6$ |
|---|---|---|---|---|
| *Zeit* | 0.00 *s* | 0.20 *s* | 19.4 *s* | 1943.4 *s* |

Es ist gut zu erkennen, dass eine Erhöhung von $n$ um den Faktor 10 eine Verlängerung der Rechenzeit um einen Faktor von ca. 100 mit sich bringt. Das ist auch zu erwarten, denn sowohl $i$ als auch $k$ laufen über einen ca. 10-mal so großen Bereich. Es werden also ca. 100-mal soviele Produkte $i \cdot k$ gebildet.

Daraus können wir schon jetzt sehen: um auf $n = 10^9$ zu kommen, müssten wir die Zeit bei $n = 10^6$ um den Faktor $(10^9/10^6)^2 = 10^6$ erhöhen und würden dafür $1943 \cdot 10^6$ Sekunden = *61 Jahre und 7 Monate* brauchen. Das ist natürlich untauglich für die Praxis.

## Womit verbringt der Algorithmus seine Zeit?

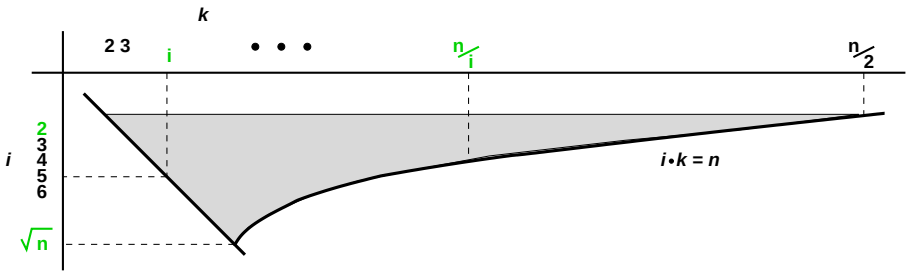
Er erzeugt alle Produkte $i \cdot k$ in einem gewissen Bereich *(Abb. links)*:




Jedoch wird jedes einzelne Ergebnis für $i \cdot k$ nur einmal benötigt. Danach ist es aus der Liste entfernt und der Algorithmus bräuchte es eigentlich nie wieder zu erzeugen. Wo macht er Arbeit zuviel? Zum Beispiel dort, wo $i$ und $k$ genau vertauschte Werte haben, etwa $i = 3, k = 5$ und später $i = 5, k = 3$. In beiden Fällen ist das Ergebnis des Produkts dasselbe, wie uns die Vertauschungsregel der Multiplikation lehrt: es ist immer $i \cdot k = k \cdot i$. Deshalb können wir $k \geq i$ festlegen, um diese Doppelungen zu vermeiden *(Abb. rechts)*.

Diese Idee spart auf Anhieb die halbe Arbeit! Jedoch sind auch 30 Jahre und 10 Monate noch zu lange für unsere Tabelle. Wo können wir noch Arbeit sparen? Dort, wo in Schritt 4 sowieso nichts passiert, wenn nämlich $i \cdot k > n$ ist. Die Liste enthält ja nur Zahlen bis $n$, jenseits von $n$ ist nichts zu streichen.

Um das zu erreichen, brauchen wir die $k$-Schleife (Zeile 3) nur für solche Werte auszuführen, für die $i \cdot k \leq n$ ist. Diese Bedingung selbst sagt uns, welche $k$ das sind: $k \leq n/i$.




Als willkommenen Nebeneffekt können wir auch den Laufbereich für $i$ begrenzen. Aus den beiden Einschränkungen $i \leq k \leq n/i$ erhalten wir $i^2 \leq n$, also $i \leq \sqrt{n}$. Für höhere $i$ ist der $k$-Bereich leer.

Der Algorithmus hat bis hierher das folgende Aussehen bekommen:

PRIMZAHLTABELLE_BESSER_1

1 schreibe alle Zahlen von 2 bis $n$ in eine Liste
2 für jede Zahl $i := 2 \ldots \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ führe aus:
3 für jede Zahl $k := i \ldots \lfloor n/i \rfloor$ führe aus:
4 streiche die Zahl $i \cdot k$ aus der Liste

(Das Zeichen $\lfloor \cdot \rfloor$ bedeutet Abrundung, denn $i$ und $k$ können nur ganzzahlige Werte annehmen.)

Wie schnell sind wir jetzt geworden? Die neuen Laufzeiten:

| $n$ | $10^4$ | $10^5$ | $10^6$ | $10^7$ | $10^8$ | **$10^9$** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Zeit | 0.00 $s$ | 0.01 $s$ | 0.01 $s$ | 2.3 $s$ | 32.7 $s$ | **452.9 s** |

Der Effekt ist recht spürbar, denn das Ziel $10^9$ ist schon in Reichweite: nur noch siebeneinhalb Minuten entfernt. Lassen wir den Computer in Gedanken laufen und nutzen diese Zeit, um es vielleicht noch besser zu machen!

## Brauchen wir jeden $i$-Wert?

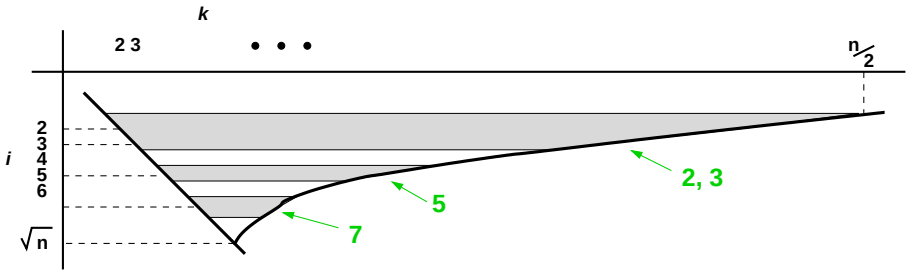
Schauen wir an, was innerhalb der $i$-Schleife (Zeile 2) genau passiert: $i$ bleibt fest und $k$ durchläuft seine Schleife (Zeile 3). Dabei erhält das Produkt $i \cdot k$ die Werte

$$i^2, \quad i(i+1), \quad i(i+2), \quad \ldots .$$

Wenn die $k$-Schleife zu Ende gelaufen ist, stehen in der Liste keine echten Vielfachen mehr von $i$. Ebenso nicht von allen Zahlen kleiner als $i$, denn sie wurden auf dieselbe Weise schon vorher gestrichen.

Was passiert, wenn $i$ keine Primzahl ist? Beispiel $i = 4$ : das Produkt $i \cdot k$ durchläuft die Werte $16, 20, 24, \ldots$. Jedoch sind diese Zahlen alle auch Vielfache von 2, da 4 selbst Vielfaches von 2 ist. Es ist im Grunde für $i = 4$ gar nichts zu tun. Ebenso ist das mit jeder anderen geraden Zahl $i > 4$.

Beispiel $i = 9$: das Produkt $i \cdot k$ durchläuft nur Vielfache von 9. Die sind aber als Vielfache von 3 schon durchlaufen und ebenfalls unnötig. So ist das mit allen Nichtprimzahlen, denn sie haben einen kleineren Primteiler, der vor ihnen schon ein Wert für $i$ war. Wir brauchen also die $k$-Schleife nur für Primzahlen $i$ auszuführen, siehe folgende Abbildung:

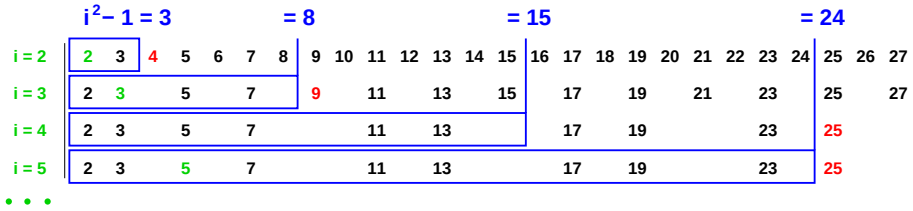



Ob nun $i$ eine Primzahl ist oder nicht, könnte uns die Liste selbst sagen — wenn sie schon fertig wäre. Wir können aber erst nach dem Ende des Algorithmus sicher sein, dass nur noch Primzahlen in der Liste stehen. Oder?

Ja und nein. Im allgemeinen *Ja*, denn sonst könnten wir den Algorithmus abkürzen. Das ist nicht immer der Fall, nehmen wir zum Beispiel $n = 100$: die Nichtprimzahl 91 muss irgendwann aus der Liste gestrichen werden. Sie wird aber erst ganz kurz vor dem Ende erzeugt, nämlich für $i = 7$, $k = 13$.

In unserem speziellen Fall aber *Nein*, denn wir wollen ja nicht jede beliebige Zahl als Primzahl erkennen, sondern eine ganz bestimmte, die Zahl $i$. Und das auch nicht zu beliebiger Zeit, sondern erst zum Anfang der $k$-Schleife für den Wert $i$. Hier gibt uns die Liste eine korrekte Auskunft! Warum?

Wir hatten oben beobachtet, dass für jedes feste $i$ alle gestrichenen Werte $i \cdot k \geq i^2$ sind. Anders ausgedrückt: im Zahlenbereich $2, \ldots, i^2 - 1$ wird nichts verändert. Da $i$ im weiteren Verlauf nur steigt, wächst auch dieser Bereich und enthält alle Bereiche vor ihm. Im folgenden Bild sind diese Bereiche blau dargestellt:




Da innnerhalb dieser Bereiche bis zum Ende des Algorithmus keine Veränderungen mehr auftreten, müssen sie bereits *vor* dem Durchlauf der $k$-Schleife für das jeweilige $i$ korrekt sein. Die Tabelle wird sozusagen in quadratischen Sprüngen fertig. Grün eingezeichnet ist der Wert $i$ selbst, den wir auf seine Primeigenschaft prüfen wollen. Es ist gut zu erkennen, dass er immer in einem blauen Bereich liegt. Um zu entscheiden, ob $i$ eine Primzahl ist, dürfen wir also einfach in der aktuellen Liste nachschauen.

Wir können im Algorithmus die $i$-Schleife jetzt wie folgt ergänzen:

PRIMZAHLTABELLE_ERATOSTHENES

1 schreibe alle Zahlen von 2 bis $n$ in eine Liste
2 für jede Zahl $i := 2 \ldots \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ *in der Liste* führe aus:
3 für jede Zahl $k := i \ldots \lfloor n/i \rfloor$ führe aus:
4 streiche die Zahl $i \cdot k$ aus der Liste

Diese Version des Verfahrens hatte der kluge Grieche vorgestellt und es heißt nach seinem Erfinder das **Sieb des Eratosthenes**. *Sieb* deswegen, weil es die gewünschten Objekte, die Primzahlen, nicht gezielt konstruiert, sondern im Gegenteil alle Nichtprimzahlen aussondert.

Unsere Zeitmessung sagt zu seinem Algorithmus:

| $n$ | $10^6$ | $10^7$ | $10^8$ | $\mathbf{10^9}$ |
|---|---|---|---|---|
| Zeit | 0.02 *s* | 0.43 *s* | 5.4 *s* | **66.5 s** |

Bei $n = 10^9$ nur noch gut eine Minute!

## Geht es noch schneller?

Mit einem ähnlichen Argument wie für die *i*-Werte können wir auch die Werte der *k*-Schleife weiter einschränken: wir brauchen nur diejenigen zu betrachten, die in der Liste gefunden werden! Steht $k$ nämlich nicht mehr dort, ist $k$ als Nichtprimzahl gestrichen worden und besitzt einen Primteiler $p < k$. Im Durchgang der *i*-Schleife mit $i = p$ wurden alle Vielfachen von $p$ gestrichen, insbesondere $k$ und seine Vielfachen. Es ist nichts mehr zu tun.

Es wäre nun nahe liegend, den Algorithmus wie folgt zu ergänzen:

```
3   für jede Zahl k := i ... ⌊n/i⌋ in der Liste führe aus:
4       ...
```

*Doch Achtung!* Diese Formulierung hat ihre Tücken. Lassen wir den Algorithmus so laufen, erzeugt er die folgende Tabelle:

2 3 5 7 **8** 11 **12** 13 17 19 **20** 23 **27** **28** 29 31 **32** 37 41 43 **44** ...

Was läuft falsch? Sehen wir uns die ersten Schritte des Algorithmus genau an. Nach der Initialisierung der Liste mit allen Zahlen bis $n$ (Zeile 1) steht darin:

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 ...

Zunächst wird $i = 2$ gesetzt und dann $k = 2$. Die 2 steht in der Liste, also wird $i \cdot k = 4$ gestrichen:

2 3 – 5 6 7 8 9 10 11 ...

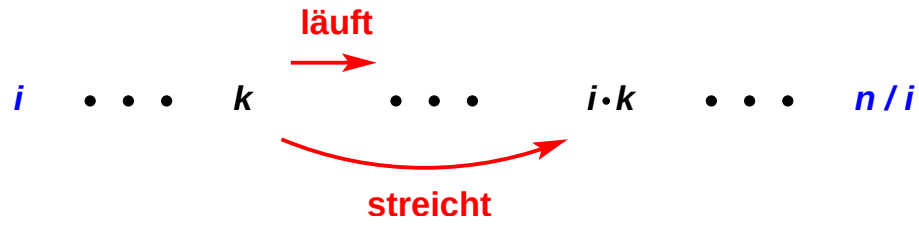
Im nächsten Schritt ist $k = 3$. Die 3 steht ebenfalls in der Liste und so wird $i \cdot k = 6$ gestrichen:

2 3 – 5 – 7 8 9 10 11 ...

Jetzt passiert's: $k = 4$ steht nicht mehr in der Liste, denn sie wurde ja als erste gestrichen. Entsprechend wird für $k = 4$ wegen der neuen Bedingung nichts gemacht und der Algorithmus fährt mit $k = 5$ fort:

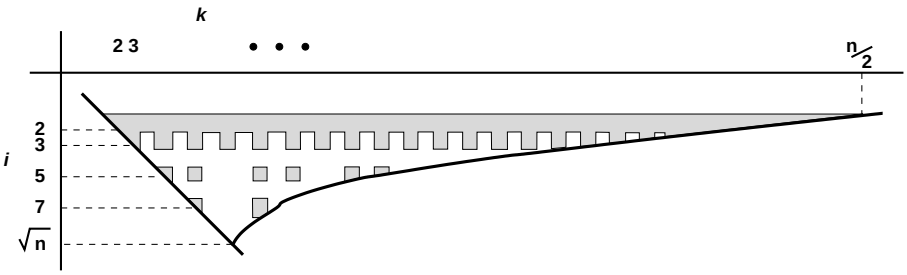
2 3 – 5 – 7 **8** 9 – 11 ...

So bleibt $2 \cdot 4 = 8$ irrtümlich in der Liste stehen. Das Problem ist, dass $k$ beim Schleifendurchlauf stets größere Zahlen $i \cdot k > k$ streicht und dann selbst erhöht wird. Irgendwann bekommt $k$ den Wert eines vormaligen Produktes $i \cdot k$ und das Verfahren wirkt ungünstig auf sich selbst zurück:




Die Lösung besteht darin, $k$ seinen Schleifenbereich *rückwärts* durchlaufen zu lassen. Dadurch wird diese Rückwirkung vermieden:


Mit dieser Überlegung werden nur noch die folgenden Produkte $i \cdot k$ gebildet:




Insgesamt ergibt sich nun die folgende Version des Algorithmus:

PRIMZAHLTABELLE_BESSER_3

1 schreibe alle Zahlen von 2 bis $n$ in eine Liste
2 für jede Zahl $i := 2 \ldots \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ in der Liste führe aus:
3 für jede Zahl $k := \lfloor n/i \rfloor \ldots i$ *in der Liste in abst. Reihenfolge* führe aus:
4 streiche die Zahl $i \cdot k$ aus der Liste

Seine Laufzeiten:

| $n$ | $10^6$ | $10^7$ | $10^8$ | $\mathbf{10^9}$ |
|---|---|---|---|---|
| Zeit | 0.01 *s* | 0.15 *s* | 1.6 *s* | **17.6 s** |

Dieses Ergebnis ist für heutige Standards durchaus akzeptabel. Wir haben ausgehend von der naiven Grundversion mit wenigen gezielten Überlegungen den Algorithmus für $n = 10^9$ um den *Faktor 254.5 Millionen* beschleunigt!

## Was können wir aus diesem Beispiel lernen?

1. einfache Rechenverfahren sind nicht automatisch *effizient*,
2. zu ihrer Beschleunigung muss man sie *gut verstehen*,

3. es sind oft *viele Verbesserungen* möglich,
4. *mathematische Ideen* können sehr weitreichend sein!

**Autoren:**

- Prof. Dr. Rolf H. Möhring
  http://www.math.tu-berlin.de/~moehring
- Dipl.-Math. Martin Oellrich
  http://www.math.tu-berlin.de/~oellrich

**Weiterführende Materialien:**

- Foliensatz des Beitrags (pdf)
  http://www-i1.informatik.rwth-aachen.de/~algorithmus/Algorithmen/algo25/tdm.pdf
- Weitere Überlegungen zum Sieb des Eratosthenes
  http://www.math.tu-berlin.de/~oellrich/algo25/zusaetze25.html

**Externe Links:**

- Wissenswertes über Eratosthenes:
  - Eratosthenes (The MacTutor History of Mathematics)
    http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Eratosthenes.html
  - Eratosthenes (Wikipedia)
    http://de.wikipedia.org/wiki/Eratosthenes
- direkte Tests für große Primzahlen
  http://www.thgweb.de/lexikon/Primzahltest