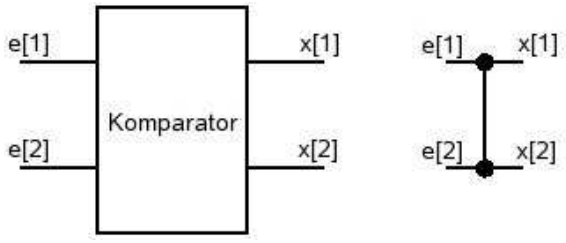
12. Algorithmus der Woche
Paralleles Sortieren
Parallel geht schnell

Autor
Rolf Wanka, FAU Erlangen-Nürnberg

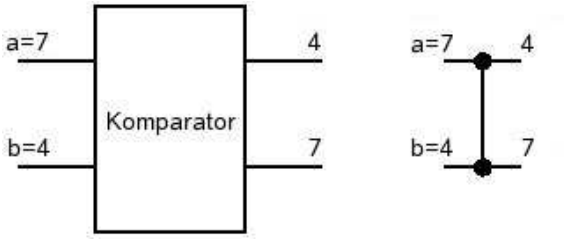
Seit es Hardware gibt, überlegt man sich, spezielle Geräte zu bauen, die ganz besonders schnell die bereits mehrfach im Rahmen des Algorithmus der Woche (ganz besonders im 3. Algorithmus der Woche: Schnelle Sortieralgorithmen) angesprochene Sortieraufgabe lösen können.

Schon als Herman Hollerith um 1890 seine berühmte Hollerith-Maschine zur Auswertung der amerikanischen Volkszählung baute, hatte er ein zusätzliches Gerät zum Sortieren der Lochkarten konstruiert. In der obigen Abbildung ist eine solche Hollerith-Maschine im Original zu sehen. Das rechte, etwas kleinere Gerät ist dabei die Lochkarten-Sortiereinheit. Im Zeitalter der Elektronik im Miniaturformat muss ein solcher Sortierer natürlich sehr viel kleiner ausfallen als Holleriths Gerät.

Wir werden im Folgenden eine Konstruktionsvorschrift für einen Hardware-Sortierer angeben. Dieser Sortierer bekommt gleichzeitig auf n Leitungen eine beliebig wirre Folge aus n Zahlen, die er sortieren soll. Dieser Sortierer soll nur aus ganz bestimmten Bausteinen zusammengesetzt werden, die *Komparatoren* genannt werden. Ein solcher Komparator hat zwei Eingänge $e[1]$ und $e[2]$ und zwei Ausgänge $x[1]$ und $x[2]$. Zwei beliebige natürliche Zahlen a und b kommen nun über die Eingangsleitungen in den Komparator hinein. Als Ausgabe wird über die Ausgangsleitung $x[1]$ die kleinere der beiden Zahlen zurückgegeben, also $x[1] = \min\{a,b\}$, und über $x[2]$ die größere der beiden, also $x[2] = \max\{a,b\}$. Die folgende Abbildung zeigt zwei Möglichkeiten, einen solchen Komparator zu zeichnen. Wir werden die rechte, kompaktere Darstellung nutzen. Um das elektronische Innenleben eines Komparators wollen wir uns hier auch gar nicht kümmern.

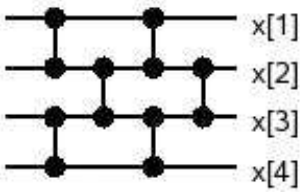


Die Eingabe $a = 7$ und $b = 4$ wird also von einem Komparator wie folgt weitergeleitet:



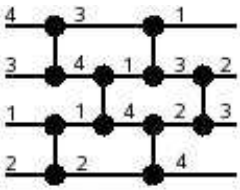
Haben wir nur einen einzigen Komparator zur Verfügung, so können wir ihn einsetzen, um mit ihm in den bereits vorgestellten Verfahren wie Mergesort und Quicksort die dort benutzten bedingten Vertauschungen durchzuführen. Da wir aber nur einen Komparator haben, muss er nacheinander, d.h. sequentiell die notwendigen bedingten Vertauschungen abarbeiten.

Wir wollen nun mit vielen Exemplaren dieses Bausteins eine Schaltung konstruieren, die Zahlenfolgen der Länge n schneller als die sequentiellen Verfahren sortiert.



Mit einem Beispiel wollen wir beginnen. Schau Dir das obige Bild an. Die Eingabe kommt von links und läuft nach rechts durch die Schaltung durch. Statt Schaltung sagt man auch gerne Netzwerk. Eine einfache Überlegung zeigt, dass dieses Netzwerk aus 6 Komparatoren jede Zahlenfolge der Länge 4 zu sortieren vermag: Egal, auf welcher Leitung wir links die kleinste Zahl eingeben, sie verlässt immer auf der obersten Leitung rechts das Netzwerk. Für die größte Zahl gilt entsprechend, dass sie unabhängig davon, wo sie das Netzwerk betritt, auf der untersten Leitung das Netzwerk verlässt. Und wie wir auch sehen, wird zum Schluss durch den letzten Komparator gerade dafür gesorgt, dass $x[2] \leq x[3]$ ist. Wir erkennen also, dass dieses Netzwerk jede Eingabefolge sortiert. Darum wird es auch Sortiernetzwerk genannt.

Am Beispiel sieht das so aus:



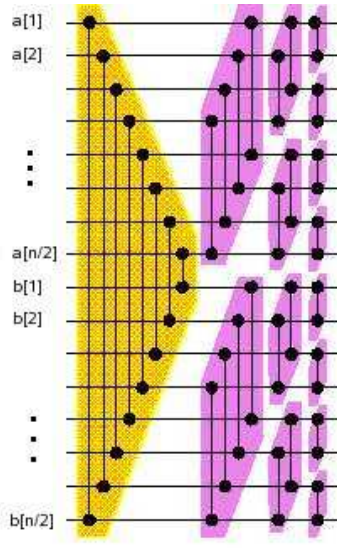
Eine weitere interessante Beobachtung können wir der Zeichnung auch noch entnehmen: Alle untereinander stehenden Komparatoren können gleichzeitig ausgeführt werden. Es vergehen also nur 4 Zeiteinheiten, bis die Eingabe sortiert vom Netzwerk ausgegeben wird. Statt von Zeiteinheiten spricht man auch von parallelen Schritten.

Können wir nun die bereits vorgestellten, schnellen sequentiellen (nicht parallelen) Verfahren wie z.B. Quicksort und Mergesort, die als Grundoperation ja auch die Funktionsweise des Komparators benutzen, durch Netzwerke aus Komparatoren realisieren? Leider ist das nicht direkt möglich, da man bei ihnen zu Beginn nie weiß, auf welchen Indexpositionen irgendwann später ein Komparator angewandt werden muss. Denn das hängt bei den schnellen sequentiellen Verfahren von der Eingabe, oder genauer, davon, wie frühere Vergleiche ausgegangen sind, ab! Bei einem Komparator-Netzwerk kann das nicht der Fall sein, hier haben wir uns schon vor dem Start festgelegt, zwischen welchen Leitungen Komparatoren sind.

Deswegen hat Kenneth Batcher, ein Wissenschaftler aus den USA, 1968 ein spezielles Netzwerk konstruiert, das in wenigen, nämlich $\frac{1}{2} \cdot \log_2 n \cdot (\log_2 n + 1)$ parallelen Schritten jede Eingabe sortieren kann. Das heißt, zum Sortieren von $2^{20} = 1048576$ Zahlen benötigt dieses Netzwerk nur $\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 = 210$ parallele Schritte. Der Ansatz zu diesem Netzwerk folgt dem im 3. Algorithmus der Woche beschriebenen Vorgehen des *divide and conquer*, also des Teilens und Herrschens.

Wir wollen also nun n Zahlen sortieren. Dazu konstruieren wir das Sortiernetzwerk S_n. Weil wir mit der Teile-und-Herrsche-Methode die Anzahl der Zahlen immer wieder in zwei gleichgroße Teile zerlegen werden, wählen wir der Einfachheit halber $n = 2^k$, da wir dann immer wieder ohne Rest durch 2 dividieren können. Angenommen, wir wüssten schon, wie wir halb so viele, also $\frac{n}{2} = 2^{k-1}$ Zahlen mit Hilfe eines Netzwerks $S_{\frac{n}{2}}$ sortieren könnten. Dann sortieren wir mit zwei Kopien von $S_{\frac{n}{2}}$ gleichzeitig erst einmal die obere und die untere Hälfte der Eingabe. Dies ist der Teile-Schritt des Teilens und Herrschens.

Jetzt bleibt als Herrsche-Schritt wie im 3. Algorithmus der Woche die Aufgabe des Mischens zu lösen, d.h. nun müssen wir ein Netzwerk aus Komparatoren angeben, das aus zwei sortierten Zahlenfolgen $a[1],...,a[\frac{n}{2}]$ und $b[1],...,b[\frac{n}{2}]$ eine sortierte Gesamtfolge macht. Dazu hat Kenneth Batcher das in der folgenden Abbildung dargestellte Komparator-Netzwerk erfunden, das er den *Bitonen Mischer* nannte. Warum es so heißt, werden wir gleich noch sehen.



Es beginnt immer mit dem gelb unterlegten Schritt (linkes "Dreieck") (das ist wirklich nur ein einziger Schritt, die Komparatoren sind nur nebeneinander gezeichnet, um sie besser erkennen zu können) und führt danach die violett unterlegten Schritte (rechte "Rauten") aus. Das Muster dieser beiden Schrittarten ist für uns hier und heute klar und braucht nicht mehr extra beschrieben zu werden.

Dass dieses Netzwerk die beiden sortierten Folgen a und b in eine sortierte Gesamtfolge verwandelt, ist bei weitem nicht offensichtlich. Um das zu beweisen, nutzen wir eine tolle Eigenschaft der Komparator-Netzwerke, das sog. *0-1-Prinzip*:

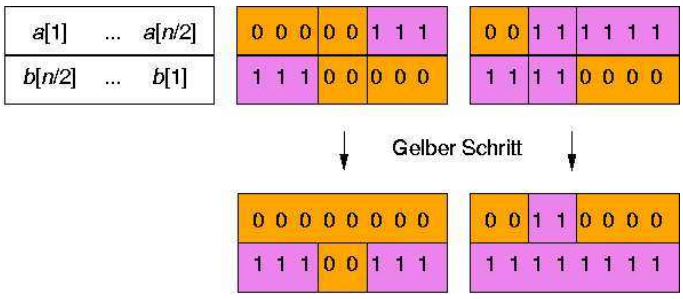
> Sortiert das Komparator-Netzwerk jede Folge der Länge n,
> die nur aus 0-en und 1-en besteht,
> so sortiert es auch jede beliebige Zahlenfolge der Länge n.

Auf einen genauen Beweis wollen wir hier verzichten, aber die Idee ist zum Glück ganz einfach. Werden nämlich zwei beliebige Zahlen in ihrer Binärdarstellung (inklusive möglicher führender Nullen, damit sie beide gleich lang sind) dargestellt, also z.B. $14 = (1110)_2$ und $13 = (1101)_2$, dann erkennen wir, dass sich die Entscheidung, welches die größere der beiden Zahlen ist, auf die Frage reduziert, an welcher Stelle sie sich, von links schauend, zuerst unterscheiden. Im Beispiel mit 14 und 13 ist diese Stelle rot und fett markiert. Was davor kommt, ist bei beiden gleich und könnte weggelassen werden, was danach kommt, ist unerheblich für die Beantwortung der Frage, und so ist nur die Frage nach 0 und 1 übrig geblieben.

Ab jetzt betrachten wir also erst einmal nur noch 0-1-Folgen. Nun sind wir soweit, dass wir zeigen können, dass der Bitone Mischer aus den sortierten 0-1-Folgen a und b eine sortierte Gesamtfolge macht. Und hier kommt nun der Begriff biton ins Spiel. Bitone Folgen entstehen, indem eine monoton steigende 0-1-Folge x (das ist eine Folge, bei der die einzelnen Zahlen von links nach rechts größer werden oder gleich bleiben, aber niemals kleiner werden) und eine monoton fallende 0-1-Folge y (das ist eine Folge, bei der die einzelnen Zahlen von links nach rechts kleiner werden oder gleich bleiben, aber niemals größer werden) beliebig herum aneinander geklebt werden, d.h. xy und yx sind biton. Und daher kommt dann auch der Name: Zweimal (bi) monoton (ton).

Klingt kompliziert? Ist es aber nicht, wenn Du Dir ein paar Beispiele ansiehst: $00111000, 11100011, 0000, 11111000$ und 11111111 sind alles bitone Folgen. Sicher findest Du die notwendigen Folgen x und y, oder? Es gibt jedesmal ganz viele.

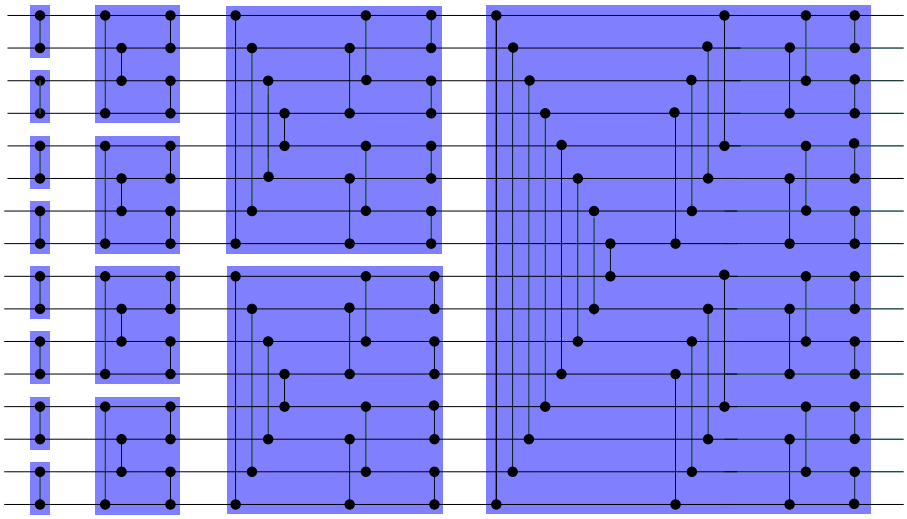
Was macht nun der gelbe Schritt, also der erste Schritt des Bitonen Mischers? Drehen wir die Folge b einfach mal um und schreiben a und b untereinander. Dann entsteht zum Beispiel das folgende Bild.



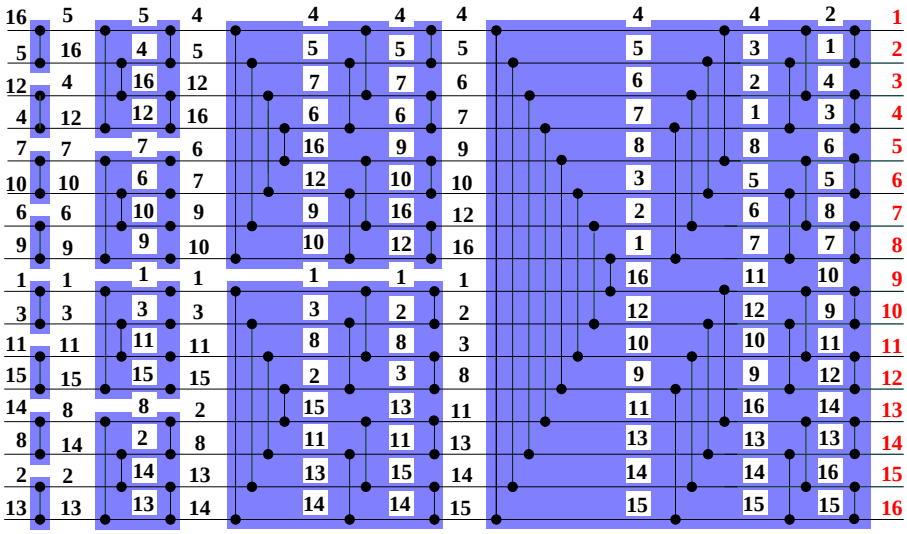
Auf untereinander stehende Zahlen werden die Komparatoren des gelben Schrittes angewandt, d.h. die kleinere der beiden Zahlen wird nachher oben, die größere unten stehen. Die beiden farbigen Teile zeigen zwei Beispiele. Nach Anwendung des gelben Schrittes ist immer eine ganze Hälfte, und zwar die richtige, voller 0-en bzw. voller 1-en, und die andere Hälfte ist biton! Diese Hälfte ist jetzt die Eingabe der violetten Schritte. Schneide einmal eine bitone 0-1-Folge in der Mitte durch und schreibe die Hälften untereinander. Es entsteht das gleiche Bild wie gerade, und wieder werden auf untereinander stehende Zahlen die Komparatoren des nächsten Schrittes angewandt. Versuche doch mal selbst ein paar Beispiele. Zum Schluss, nach

dem letzten violetten Schritt, muss die ganze 0-1-Folge also auch sortiert sein.

So, und nun können wir uns überlegen, wie $S_{\frac{n}{2}}$ aussieht. Auch $S_{\frac{n}{2}}$ endet mit einem Bitonen Mischer, diesmal nur für $\frac{n}{2}$ viele Eingangsleitungen. Gespeist wird dieser Bitone Mischer von zwei Kopien von $S_{\frac{n}{4}}$. Das wiederholt sich, bis der die einspeisenden Sortierer nur noch zwei Zahlen zu sortieren haben, wofür wir dann einfach einen Komparator nehmen. Insgesamt bekommen wir also z.B. das nachfolgend dargestellte Gesamtnetzwerk S_{16}, das jede 0-1-Folge der Länge 16 und damit, wegen des 0-1-Prinzips, auch jede Folge aus 16 Zahlen in 10 parallelen Schritten sortiert! Dabei ist jeder blau unterlegte Kasten ein Bitoner Mischer. Das gesamte Netzwerk heißt dann *Bitoner Sortierer*.



Hier ist noch ein kleines Beispiel, in dem 16 Zahlen von S_{16} sortiert werden.



Für die Laufzeit bekommen wir allgemein $1+2+\ldots+(k-1)+k=\frac{1}{2}\cdot k\cdot(k+1)=\frac{1}{2}\cdot\log_2 n\cdot(\log_2 n+1)$ parallele Schritte. Das ist proportional zu $(\log_2 n)\cdot(\log_2 n)$ vielen parallelen Schritten. Vergleiche das einmal mit der Laufzeit des sequentiellen Mergesort, die proportional zu $n\ \log_2 n$ ist. Den Faktor von n haben wir hier durch den Faktor $\log_2 n$ ersetzen können! Für das Beispiel mit $n=2^{20}$ wird also der Faktor 1048576 durch den Faktor 20 ersetzt. Je größer n, desto größer ist also der Laufzeitgewinn durch unser Sortiernetzwerk.

Autor:

- Prof. Dr. Rolf Wanka
  http://www12.informatik.uni-erlangen.de/people/rwanka/

Weitere Links:

- Friedhelm Meyer auf der Heide, Rolf Wanka. Von der Hollerith-Maschine zum Parallelrechner. Die alltägliche Aufgabe des Sortierens als Fortschrittsmotor für die Informatik. ForschungsForum Paderborn (FFP) 3 (2000) 112-116.
  http://wwwcs.uni-paderborn.de/cs/ag-madh/WWW/wanka/pubs/abstracts/FFP00ABS.html
- 3. Algorithmus der Woche: Schnelle Sortieralgorithmen
  http://www-i1.informatik.rwth-aachen.de/~algorithmus/algo3.php
- Kenneth E. Batcher. Sorting networks and their applications. In AFIPS Conf. Proc. 32, 307-314, 1968.
  http://www.cs.kent.edu/~batcher/
  http://www.cs.kent.edu/~batcher/sort.ps