Effiziente Algorithmen

Übungsblatt 1

Prof. Hoefer
L. Huth, F. Seesemann
Lehrstuhl für Informatik 1
RWTH Aachen

WS24/25
15.10.2024
Abgabe: Di. 22.10., 23:55

- Die Übungsblätter müssen in Gruppen von 3 Studierenden **aus dem gleichen Tutorium** abgegeben werden. Abgaben von Gruppen anderer Größen werden mit 0 Punkten bewertet.
- Die abgegebenen Lösungen müssen mit Namen und Matrikelnummern aller Teammitglieder beschriftet werden.
- Um zur Klausur zugelassen zu werden, muss folgendes erreicht werden: 50% der Punkte aller Übungsblätter.
- Um einen Bonus zur Klausur zu erhalten, muss folgendes erreicht werden: 75% der Punkte aller Übungsblätter und mindestens einmal eine Lösung im Tutorium vorrechnen.
- Es wird nur eine einzelne PDF-Datei als Abgabe akzeptiert. Eingescannte Lösungen sind erlaubt, solange sie gut lesbar sind.

Hausaufgabe 1.1 (5 Punkte)

Führen Sie die folgenden Varianten des Flussproblems auf die Standardversion der Vorlesung zurück. Zeigen Sie dabei auch die Korrektheit ihrer Konstruktion.

(a) (1 Punkt) Es gibt mehrere Quellen und Senken.

(b) (1 Punkt) Sowohl den Kanten als auch den Knoten sind Kapazitäten zugeordnet. Für einen zulässigen Fluss muss jetzt zusätzlich gelten:

$$\forall u \in V \setminus \{t\}\colon \sum_{(u,v)\in E} f(u,v) \leq c(u) \qquad \text{und} \qquad \sum_{(u,t)\in E} f(u,t) \leq c(t),$$

wobei $c\colon V \mapsto \mathbb{N}_0$ die Kapazitäten der Knoten angibt.

(c) (3 Punkte) Das Netzwerk ist ungerichtet. Geben Sie eine Formalisierung für das Problem zur Berechnung maximaler Flüsse auf ungerichteten Netzwerken an, und führen Sie dieses Problem auf die Variante zur Berechnung von maximalen Flüssen auf gerichteten Netzwerken zurück.

Hausaufgabe 1.2 (3 Punkte)

Ihr Betrieb hat beschlossen den Jahresbonus komplett an die Mitarbeiter:in auszuschütten, die dieses Jahr die meisten Stunden gearbeitet hat. Es gibt Projekte $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$, die auf verschiedene Mitarbeiter:innen Ihres Teams $AG = \{m_1, \ldots, m_k\}$ aufgeteilt werden können. Der verbleibende Arbeitsaufwand (in Stunden) $a(p) \in \mathbb{R}$ ist für jedes Projekt $p \in P$ gegeben. Leider sind nicht alle Teammitglieder sind für alle Projekte qualifiziert. Welche Teammitglieder an welchem Projekt arbeiten können ist in $q(p) \subset AG$ gegeben. Die Einteilung der Arbeitenden auf Projekte, sprich wer wie viele Stunden in welches Projekt steckt, liegt nun in Ihrer Hand. Ihre Teammitglieder haben bisher jeweils $h(m) : m \in AG$ gearbeitet. Das *Jahresbonusproblem* ist nun zu ermitteln, ob Sie mit H gearbeiteten Stunden bereits eine Aufteilung von Projektstunden auf Mitarbeiter:innen finden können, s.d. Sie den Jahresbonus erhalten. Bei Gleichstand können Sie davon ausgehen, dass Sie die Bonuszahlung erhalten.

Modellieren Sie das Jahresbonusproblem als Flussproblem.

Hausaufgabe 1.3 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass es ein Flussnetzwerk mit Kapazitäten aus $\mathbb{R}$ und eine unendliche Sequenz von Fv-Wegen (Flussvergrößernde Wege) gibt, so dass der Gesamtfluss nicht gegen den maximalen Fluss konvergiert.

(a) (4 Punkte) Betrachten Sie dazu den Graphen in Abbildung **??**.

Dieser Graph ist auf Grund der Multikanten zunächst noch keine zulässige Eingabe für das Flussproblem. Dennoch lässt sich die Definition des Flusses und von Fv-Wegen einfach übertragen. Zeigen Sie zunächst, dass es in diesem Graphen eine unendliche Sequenz von Fv-Wegen gibt, die gegen den maximalen Fluss konvergiert, ohne ihn zu erreichen.

Hinweis: Die Fv-Wege sind von der Form $s \to u \to v \to u \to v \to t$.

(b) (1 Punkt) Erweitern Sie die Konstruktion so, dass es keine Multikanten mehr gibt und es nicht mehr nötig ist, Knoten auf Fv-Wegen doppelt zu besuchen. Trotzdem soll eine unendliche Sequenz von Flussvergrößerungen erhalten bleiben.

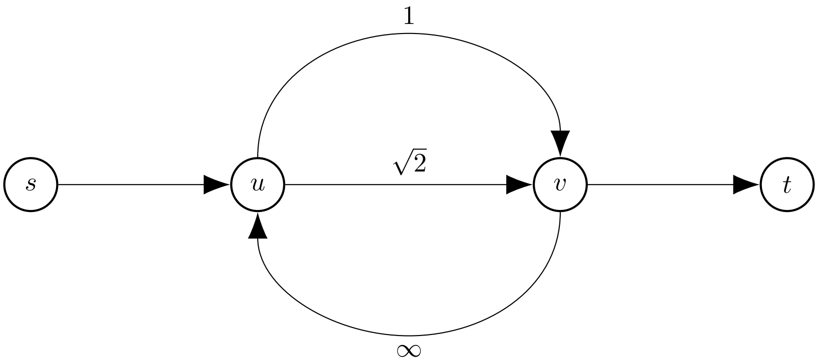

Abbildung 1: Multigraph mit reellwertigen Kapazitäten

(c) (1 Punkt) Geben Sie ein ähnliches Beispiel an, bei dem der berechnete Fluss nicht gegen den maximalen Fluss konvergiert.

Hausaufgabe 1.4 (3 Punkte)

Wir definieren Restnetzwerke neu. Diese werden nun ohne Kanten nach s konstruiert. Das Ergebnis ist also dasselbe, wie wenn man nach der normalen Konstruktion von G_f für alle $v \in V$ die Kanten (v, s) entfernt, bzw. wir $c_f(v, s) = 0$ setzen.

Beweisen oder widerlegen Sie: Der Ford-Fulkerson Algorithmus liefert trotzdem einen maximalen Fluss.

Aufgabe:	1	2	3	4	Total
Punkte:	5	3	6	3	17
Erreicht:					

Abgabefrist: Die Lösungen müssen bis **Di. 22.10., 23:55** im Moodle-Lernraum abgegeben werden.