Effiziente Algorithmen (SS2022)
Chapter 5
Lineare Programme 2

Walter Unger

Lehrstuhl für Informatik 1

21.05.2022 10:47:09

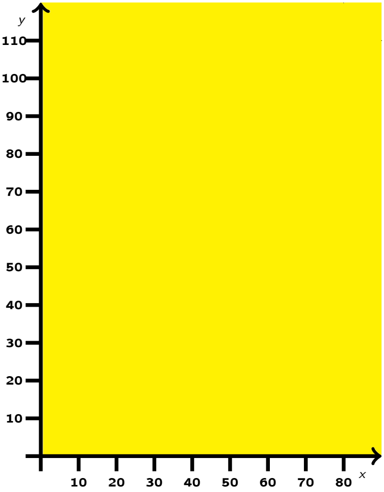
Contents I

Einfaches Beispiel

Einfaches Beispiel

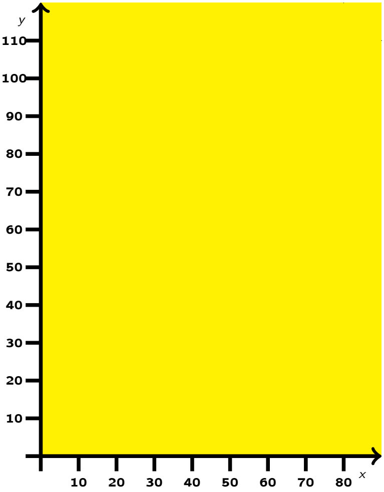
- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.

Einfaches Beispiel



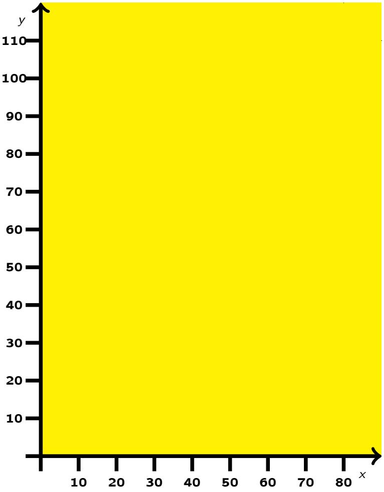
- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.

Einfaches Beispiel



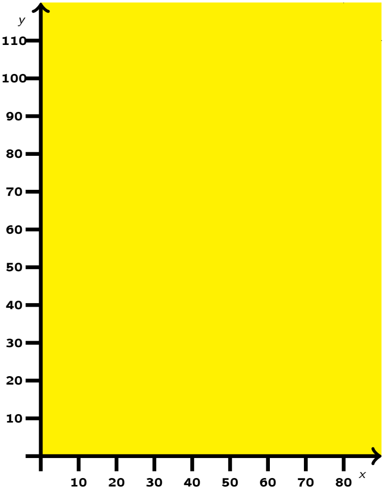
- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):

Einfaches Beispiel



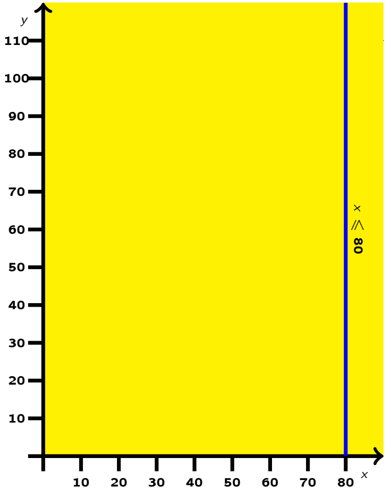
- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):
  - x kg Weizenmehl

Einfaches Beispiel



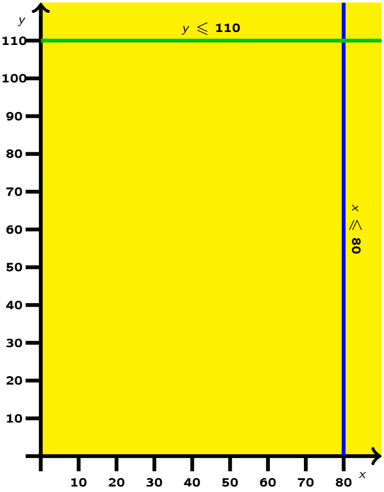
- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):
  - x kg Weizenmehl
  - y kg Roggenmehl

Einfaches Beispiel



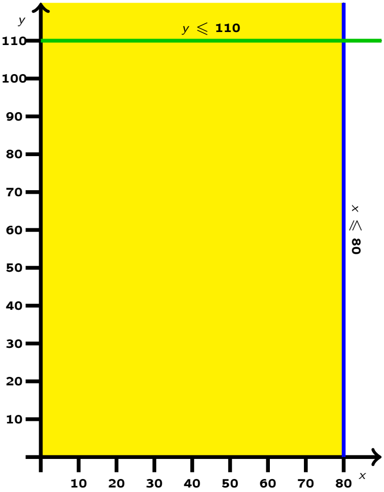
- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):
  - x kg Weizenmehl
  - y kg Roggenmehl
  - Maximal 80 kg Weizenmehl.

Einfaches Beispiel



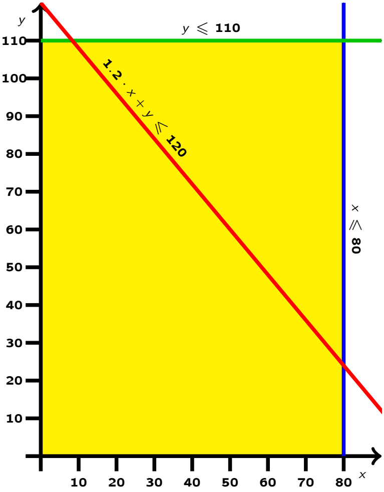
- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):
  - x kg Weizenmehl
  - y kg Roggenmehl
  - Maximal 80 kg Weizenmehl.
  - Maximal 110 kg Roggenmehl.

Einfaches Beispiel



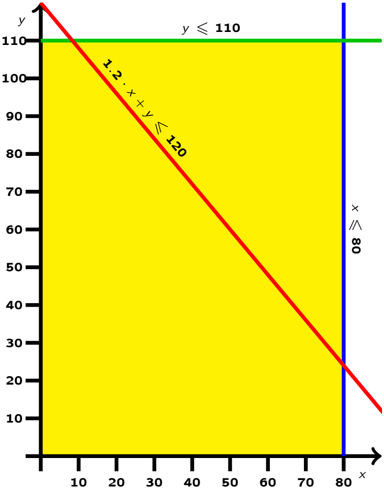
- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine “Zielfunktion” zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):
  - x kg Weizenmehl
  - y kg Roggenmehl
  - Maximal 80 kg Weizenmehl.
  - Maximal 110 kg Roggenmehl.
  - Mischungsverhältnis: $1.2 \cdot x + y$.

Einfaches Beispiel



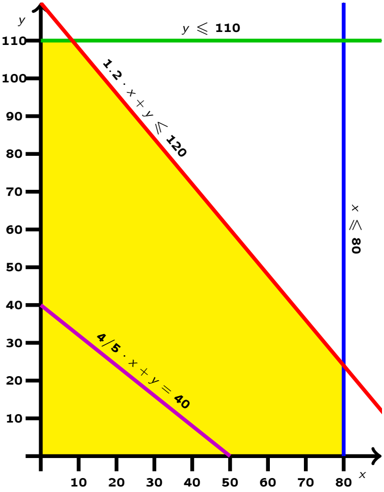
- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine “Zielfunktion” zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):
  - x kg Weizenmehl
  - y kg Roggenmehl
  - Maximal 80 kg Weizenmehl.
  - Maximal 110 kg Roggenmehl.
  - Mischungsverhältnis: $1.2 \cdot x + y$.
  - Maximale Brotmenge: $1.2 \cdot x + y \leqslant 120$.

Einfaches Beispiel



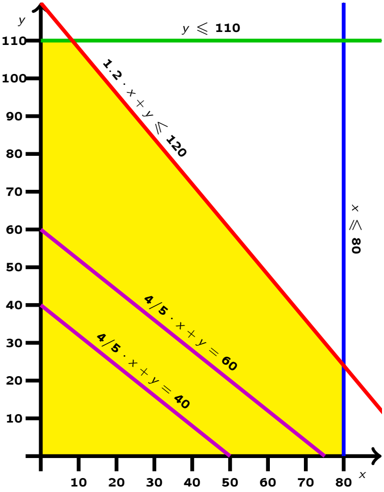
- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):
  - x kg Weizenmehl
  - y kg Roggenmehl
  - Maximal 80 kg Weizenmehl.
  - Maximal 110 kg Roggenmehl.
  - Mischungsverhältnis: $1.2 \cdot x + y$.
  - Maximale Brotmenge: $1.2 \cdot x + y \leqslant 120$.
  - Zu optimieren: $f(x, y) = 4/5 \cdot x + y$.

Einfaches Beispiel



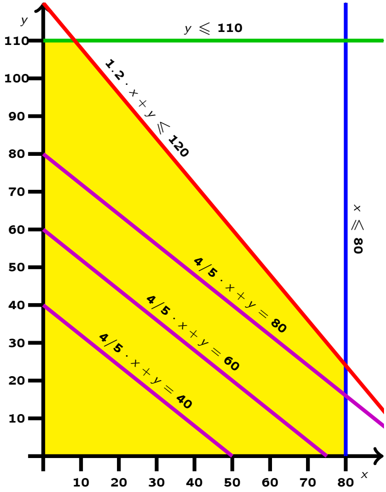
- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):
  - x kg Weizenmehl
  - y kg Roggenmehl
  - Maximal 80 kg Weizenmehl.
  - Maximal 110 kg Roggenmehl.
  - Mischungsverhältnis: $1.2 \cdot x + y$.
  - Maximale Brotmenge: $1.2 \cdot x + y \leqslant 120$.
  - Zu optimieren: $f(x, y) = 4/5 \cdot x + y$.

Einfaches Beispiel



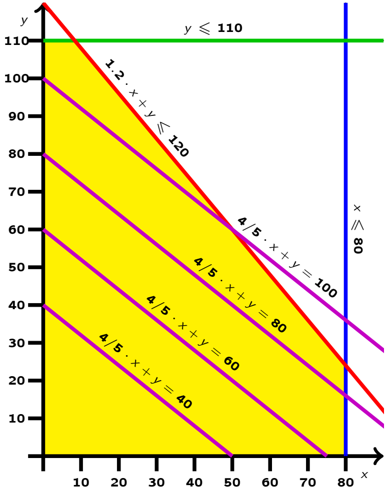
- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):
  - x kg Weizenmehl
  - y kg Roggenmehl
  - Maximal 80 kg Weizenmehl.
  - Maximal 110 kg Roggenmehl.
  - Mischungsverhältnis: $1.2 \cdot x + y$.
  - Maximale Brotmenge: $1.2 \cdot x + y \leqslant 120$.
  - Zu optimieren: $f(x, y) = 4/5 \cdot x + y$.

Einfaches Beispiel



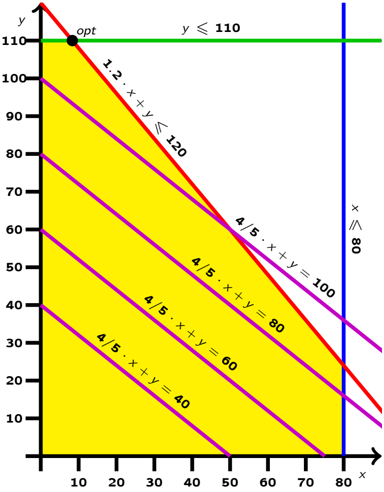
- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):
  - x kg Weizenmehl
  - y kg Roggenmehl
  - Maximal 80 kg Weizenmehl.
  - Maximal 110 kg Roggenmehl.
  - Mischungsverhältnis: $1.2 \cdot x + y$.
  - Maximale Brotmenge: $1.2 \cdot x + y \leqslant 120$.
  - Zu optimieren: $f(x, y) = 4/5 \cdot x + y$.

Einfaches Beispiel



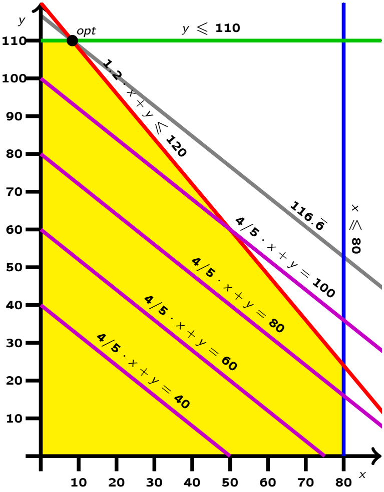
- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):
  - x kg Weizenmehl
  - y kg Roggenmehl
  - Maximal 80 kg Weizenmehl.
  - Maximal 110 kg Roggenmehl.
  - Mischungsverhältnis: $1.2 \cdot x + y$.
  - Maximale Brotmenge: $1.2 \cdot x + y \leqslant 120$.
  - Zu optimieren: $f(x, y) = 4/5 \cdot x + y$.

Einfaches Beispiel



- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):
  - x kg Weizenmehl
  - y kg Roggenmehl
  - Maximal 80 kg Weizenmehl.
  - Maximal 110 kg Roggenmehl.
  - Mischungsverhältnis: $1.2 \cdot x + y$.
  - Maximale Brotmenge: $1.2 \cdot x + y \leqslant 120$.
  - Zu optimieren: $f(x, y) = 4/5 \cdot x + y$.

Einfaches Beispiel



- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):
  - x kg Weizenmehl
  - y kg Roggenmehl
  - Maximal 80 kg Weizenmehl.
  - Maximal 110 kg Roggenmehl.
  - Mischungsverhältnis: $1.2 \cdot x + y$.
  - Maximale Brotmenge: $1.2 \cdot x + y \leqslant 120$.
  - Zu optimieren: $f(x, y) = 4/5 \cdot x + y$.

Beispiel: Flussproblem

- Flussproblem:

Beispiel: Flussproblem

- Flussproblem:
  - Gegeben $G = (V, E, s, t, c)$ mit $c : E \mapsto \mathbb{N}$.

Beispiel: Flussproblem

- Flussproblem:
  - Gegeben $G = (V, E, s, t, c)$ mit $c : E \mapsto \mathbb{N}$.
  - Maximiere den Fluss.

Beispiel: Flussproblem

- Flussproblem:
  - Gegeben $G = (V, E, s, t, c)$ mit $c : E \mapsto \mathbb{N}$.
  - Maximiere den Fluss.
- als lineares Programm:

Beispiel: Flussproblem

- Flussproblem:
  - Gegeben $G = (V, E, s, t, c)$ mit $c : E \mapsto \mathbb{N}$.
  - Maximiere den Fluss.
- als lineares Programm:
  - Variablen x_e für $e \in E$.

Beispiel: Flussproblem

- Flussproblem:
  - Gegeben $G = (V, E, s, t, c)$ mit $c : E \mapsto \mathbb{N}$.
  - Maximiere den Fluss.
- als lineares Programm:
  - Variablen x_e für $e \in E$.
  - Maximiere

$$\sum_{e \in N_{out}(s) \in E} x_e.$$

Beispiel: Flussproblem

- Flussproblem:
  - Gegeben $G = (V, E, s, t, c)$ mit $c : E \mapsto \mathbb{N}$.
  - Maximiere den Fluss.
- als lineares Programm:
  - Variablen x_e für $e \in E$.
  - Maximiere

$$\sum_{e \in N_{out}(s) \in E} x_e.$$

  - unter Einhaltung der Bedingungen:

Beispiel: Flussproblem

- Flussproblem:
  - Gegeben $G = (V, E, s, t, c)$ mit $c : E \mapsto \mathbb{N}$.
  - Maximiere den Fluss.
- als lineares Programm:
  - Variablen x_e für $e \in E$.
  - Maximiere
    $$\sum_{e \in N_{out}(s) \in E} x_e.$$
  - unter Einhaltung der Bedingungen:
    - Für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s, t\}$: $\sum_{e \in N_{in}(v)} x_e = \sum_{e \in N_{out}(v)} x_e$,

Beispiel: Flussproblem

- Flussproblem:
  - Gegeben $G = (V, E, s, t, c)$ mit $c : E \mapsto \mathbb{N}$.
  - Maximiere den Fluss.
- als lineares Programm:
  - Variablen x_e für $e \in E$.
  - Maximiere
    $$\sum_{e \in N_{out}(s) \in E} x_e.$$
  - unter Einhaltung der Bedingungen:
    - Für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s, t\}$: $\sum_{e \in N_{in}(v)} x_e = \sum_{e \in N_{out}(v)} x_e$,
    - $\forall e \in E : x_e \leqslant c_e$, und

Beispiel: Flussproblem

- Flussproblem:
  - Gegeben $G = (V, E, s, t, c)$ mit $c : E \mapsto \mathbb{N}$.
  - Maximiere den Fluss.
- als lineares Programm:
  - Variablen x_e für $e \in E$.
  - Maximiere
    $$\sum_{e \in N_{out}(s) \in E} x_e.$$
  - unter Einhaltung der Bedingungen:
    - Für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s, t\}$: $\sum_{e \in N_{in}(v)} x_e = \sum_{e \in N_{out}(v)} x_e$,
    - $\forall e \in E : x_e \leqslant c_e$, und
    - $\forall e \in E : x_e \geqslant 0$.

Beispiel: Flussproblem

- Flussproblem:
  - Gegeben $G = (V, E, s, t, c)$ mit $c : E \mapsto \mathbb{N}$.
  - Maximiere den Fluss.
- als lineares Programm:
  - Variablen x_e für $e \in E$.
  - Maximiere
    $$\sum_{e \in N_{out}(s) \in E} x_e.$$
  - unter Einhaltung der Bedingungen:
    - Für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s, t\}$: $\sum_{e \in N_{in}(v)} x_e = \sum_{e \in N_{out}(v)} x_e$,
    - $\forall e \in E : x_e \leqslant c_e$, und
    - $\forall e \in E : x_e \geqslant 0$.

Beispiel: Relaxiertes Rucksackproblem

- Relaxiertes Rucksackproblem:

Beispiel: Relaxiertes Rucksackproblem

- Relaxiertes Rucksackproblem:
  - gegeben d teilbare Objekte mit Gewichten g_i und

Beispiel: Relaxiertes Rucksackproblem

- Relaxiertes Rucksackproblem:
  - gegeben d teilbare Objekte mit Gewichten g_i und
  - die Gewichtsschranke G des Rucksacks.

Beispiel: Relaxiertes Rucksackproblem

- Relaxiertes Rucksackproblem:
  - gegeben d teilbare Objekte mit Gewichten g_i und
  - die Gewichtsschranke G des Rucksacks.
  - Und v_i sei der Nutzen für $1 \leqslant i \leqslant d$.

Beispiel: Relaxiertes Rucksackproblem

- Relaxiertes Rucksackproblem:
  - gegeben d teilbare Objekte mit Gewichten g_i und
  - die Gewichtsschranke G des Rucksacks.
  - Und v_i sei der Nutzen für $1 \leqslant i \leqslant d$.
  - Sei x_i der Anteil von Objekt i.

Beispiel: Relaxiertes Rucksackproblem

- Relaxiertes Rucksackproblem:
  - gegeben d teilbare Objekte mit Gewichten g_i und
  - die Gewichtsschranke G des Rucksacks.
  - Und v_i sei der Nutzen für $1 \leqslant i \leqslant d$.
  - Sei x_i der Anteil von Objekt i.
  - Fülle den Rucksack. Dabei soll der Nutzen maximal sein.

Beispiel: Relaxiertes Rucksackproblem

- Relaxiertes Rucksackproblem:
  - gegeben d teilbare Objekte mit Gewichten g_i und
  - die Gewichtsschranke G des Rucksacks.
  - Und v_i sei der Nutzen für $1 \leqslant i \leqslant d$.
  - Sei x_i der Anteil von Objekt i.
  - Fülle den Rucksack. Dabei soll der Nutzen maximal sein.
- Als lineares Programm:

Beispiel: Relaxiertes Rucksackproblem

- Relaxiertes Rucksackproblem:
  - gegeben d teilbare Objekte mit Gewichten g_i und
  - die Gewichtsschranke G des Rucksacks.
  - Und v_i sei der Nutzen für $1 \leqslant i \leqslant d$.
  - Sei x_i der Anteil von Objekt i.
  - Fülle den Rucksack. Dabei soll der Nutzen maximal sein.
- Als lineares Programm:
  - Maximiere

$$\sum_{i=1}^{d} v_i \cdot x_i.$$

Beispiel: Relaxiertes Rucksackproblem

- Relaxiertes Rucksackproblem:
  - gegeben d teilbare Objekte mit Gewichten g_i und
  - die Gewichtsschranke G des Rucksacks.
  - Und v_i sei der Nutzen für $1 \leqslant i \leqslant d$.
  - Sei x_i der Anteil von Objekt i.
  - Fülle den Rucksack. Dabei soll der Nutzen maximal sein.
- Als lineares Programm:
  - Maximiere
$$\sum_{i=1}^{d} v_i \cdot x_i.$$
  - unter den Nebenbedingungen:

Beispiel: Relaxiertes Rucksackproblem

- Relaxiertes Rucksackproblem:
  - gegeben d teilbare Objekte mit Gewichten g_i und
  - die Gewichtsschranke G des Rucksacks.
  - Und v_i sei der Nutzen für $1 \leqslant i \leqslant d$.
  - Sei x_i der Anteil von Objekt i.
  - Fülle den Rucksack. Dabei soll der Nutzen maximal sein.
- Als lineares Programm:
  - Maximiere

$$\sum_{i=1}^{d} v_i \cdot x_i .$$

  - unter den Nebenbedingungen:
    - $\sum_{i=1}^{d} g_i \cdot x_i \leqslant G$,

Beispiel: Relaxiertes Rucksackproblem

- Relaxiertes Rucksackproblem:
  - gegeben d teilbare Objekte mit Gewichten g_i und
  - die Gewichtsschranke G des Rucksacks.
  - Und v_i sei der Nutzen für $1 \leqslant i \leqslant d$.
  - Sei x_i der Anteil von Objekt i.
  - Fülle den Rucksack. Dabei soll der Nutzen maximal sein.
- Als lineares Programm:
  - Maximiere
$$\sum_{i=1}^{d} v_i \cdot x_i.$$
  - unter den Nebenbedingungen:
    - $\sum_{i=1}^{d} g_i \cdot x_i \leqslant G$,
    - $\forall i : 1 \leqslant i \leqslant d : x_i \leqslant 1$, und

Beispiel: Relaxiertes Rucksackproblem

- Relaxiertes Rucksackproblem:
  - gegeben d teilbare Objekte mit Gewichten g_i und
  - die Gewichtsschranke G des Rucksacks.
  - Und v_i sei der Nutzen für $1 \leqslant i \leqslant d$.
  - Sei x_i der Anteil von Objekt i.
  - Fülle den Rucksack. Dabei soll der Nutzen maximal sein.
- Als lineares Programm:
  - Maximiere
$$\sum_{i=1}^{d} v_i \cdot x_i.$$
  - unter den Nebenbedingungen:
    - $\sum_{i=1}^{d} g_i \cdot x_i \leqslant G$,
    - $\forall i : 1 \leqslant i \leqslant d : x_i \leqslant 1$, und
    - $\forall i : 1 \leqslant i \leqslant d : x_i \geqslant 0$.

Beispiel: Relaxiertes Rucksackproblem

- Relaxiertes Rucksackproblem:
  - gegeben d teilbare Objekte mit Gewichten g_i und
  - die Gewichtsschranke G des Rucksacks.
  - Und v_i sei der Nutzen für $1 \leqslant i \leqslant d$.
  - Sei x_i der Anteil von Objekt i.
  - Fülle den Rucksack. Dabei soll der Nutzen maximal sein.
- Als lineares Programm:
  - Maximiere
$$\sum_{i=1}^{d} v_i \cdot x_i.$$
  - unter den Nebenbedingungen:
    - $\sum_{i=1}^{d} g_i \cdot x_i \leqslant G$,
    - $\forall i : 1 \leqslant i \leqslant d : x_i \leqslant 1$, und
    - $\forall i : 1 \leqslant i \leqslant d : x_i \geqslant 0$.

Beispiel: Routing und Wellenlängenzuweisung

- Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.

Beispiel: Routing und Wellenlängenzuweisung

- Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.
  - N_E Endknoten.

Beispiel: Routing und Wellenlängenzuweisung

- Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.
  - N_E Endknoten.
  - N_R Router mit Konverter.

Beispiel: Routing und Wellenlängenzuweisung

- Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.
  - N_E Endknoten.
  - N_R Router mit Konverter.
  - $n = N_E + N_R$.

Beispiel: Routing und Wellenlängenzuweisung

- Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.
  - N_E Endknoten.
  - N_R Router mit Konverter.
  - $n = N_E + N_R$.
  - Namen der Knoten: N_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Beispiel: Routing und Wellenlängenzuweisung

- Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.
  - N_E Endknoten.
  - N_R Router mit Konverter.
  - $n = N_E + N_R$.
  - Namen der Knoten: N_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
  - m Anzahl der Lichtwege.

Beispiel: Routing und Wellenlängenzuweisung

- Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.
  - N_E Endknoten.
  - N_R Router mit Konverter.
  - $n = N_E + N_R$.
  - Namen der Knoten: N_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
  - m Anzahl der Lichtwege.
  - E: $(i,j) \in E \iff$ Kante von N_i nach N_j.

Beispiel: Routing und Wellenlängenzuweisung

- Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.
  - N_E Endknoten.
  - N_R Router mit Konverter.
  - $n = N_E + N_R$.
  - Namen der Knoten: N_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
  - m Anzahl der Lichtwege.
  - E: $(i,j) \in E \iff$ Kante von N_i nach N_j.
  - $src(k)$: ist Startknoten der k-ten Anfrage.

Beispiel: Routing und Wellenlängenzuweisung

- Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.
  - N_E Endknoten.
  - N_R Router mit Konverter.
  - $n = N_E + N_R$.
  - Namen der Knoten: N_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
  - m Anzahl der Lichtwege.
  - E: $(i,j) \in E \iff$ Kante von N_i nach N_j.
  - $src(k)$: ist Startknoten der k-ten Anfrage.
  - $dst(k)$: ist Endknoten der k-ten Anfrage.

Beispiel: Routing und Wellenlängenzuweisung

- Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.
  - N_E Endknoten.
  - N_R Router mit Konverter.
  - $n = N_E + N_R$.
  - Namen der Knoten: N_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
  - m Anzahl der Lichtwege.
  - E: $(i,j) \in E \iff$ Kante von N_i nach N_j.
  - $src(k)$: ist Startknoten der k-ten Anfrage.
  - $dst(k)$: ist Endknoten der k-ten Anfrage.
  - Ω_{max}: Congestion des Netzwerks.

Beispiel: Routing und Wellenlängenzuweisung

- Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.
  - N_E Endknoten.
  - N_R Router mit Konverter.
  - $n = N_E + N_R$.
  - Namen der Knoten: N_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
  - m Anzahl der Lichtwege.
  - E: $(i,j) \in E \iff$ Kante von N_i nach N_j.
  - $src(k)$: ist Startknoten der k-ten Anfrage.
  - $dst(k)$: ist Endknoten der k-ten Anfrage.
  - Ω_{max}: Congestion des Netzwerks.
  - $X_{ij}^k \in \{0,1\}$ mit:

$$X_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{der } k\text{-te Weg nutzt Kante } (i,j) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel: Routing und Wellenlängenzuweisung

- Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.
  - N_E Endknoten.
  - N_R Router mit Konverter.
  - $n = N_E + N_R$.
  - Namen der Knoten: N_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
  - m Anzahl der Lichtwege.
  - E: $(i,j) \in E \iff$ Kante von N_i nach N_j.
  - $src(k)$: ist Startknoten der k-ten Anfrage.
  - $dst(k)$: ist Endknoten der k-ten Anfrage.
  - Ω_{max}: Congestion des Netzwerks.
  - $X_{ij}^k \in \{0,1\}$ mit:

$$X_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{der } k\text{-te Weg nutzt Kante } (i,j) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

  - Wegen $X_{ij}^k \in \{0,1\}$ ist dies hier ein “Integer Linerar Programm”.

Beispiel: Routing und Wellenlängenzuweisung

- Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.
  - N_E Endknoten.
  - N_R Router mit Konverter.
  - $n = N_E + N_R$.
  - Namen der Knoten: N_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
  - m Anzahl der Lichtwege.
  - E: $(i,j) \in E \iff$ Kante von N_i nach N_j.
  - $src(k)$: ist Startknoten der k-ten Anfrage.
  - $dst(k)$: ist Endknoten der k-ten Anfrage.
  - Ω_{max}: Congestion des Netzwerks.
  - $X_{ij}^k \in \{0,1\}$ mit:

$$X_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{der } k\text{-te Weg nutzt Kante } (i,j) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

  - Wegen $X_{ij}^k \in \{0,1\}$ ist dies hier ein "Integer Linerar Programm".

Routing und Wellenlängenzuweisung als ILP

$n = N_E + N_R$
$src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (1 \leqslant k \leqslant m)$
X_{ij}^{k} : k-**te Weg nutzt Kante** (i, j)

- Minimiere Zielfunktion Ω_{max}.

Routing und Wellenlängenzuweisung als ILP

$n = N_E + N_R$
$src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (1 \leqslant k \leqslant m)$
X_{ij}^k : k-te **Weg nutzt Kante** (i, j)

- Minimiere Zielfunktion Ω_{max}.
- $\sum_{k=1}^m X_{ij}^k \leqslant \Omega_{max}, \forall (i,j) \in E$.

Routing und Wellenlängenzuweisung als ILP

$n = N_E + N_R$
$src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (\mathbf{1} \leqslant k \leqslant m)$
X_{ij}^k : k**-te Weg nutzt Kante** (i,j)

- Minimiere Zielfunktion Ω_{max}.
- $\sum_{k=1}^{m} X_{ij}^k \leqslant \Omega_{max}, \forall (i,j) \in E$.
- Für alle $k : 1 \leqslant k \leqslant m$ und alle $i : 1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\sum_{j:(i,j)\in E} X_{ij}^k - \sum_{j:(j,i)\in E} X_{ji}^k = \begin{cases} 1 & \text{falls } src(k) = i \\ -1 & \text{falls } dst(k) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Routing und Wellenlängenzuweisung als ILP

$n = N_E + N_R$
$src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (\mathbf{1} \leqslant k \leqslant m)$
X_{ij}^k : k**-te Weg nutzt Kante** (i, j)

- Minimiere Zielfunktion Ω_{max}.
- $\sum_{k=1}^{m} X_{ij}^k \leqslant \Omega_{max}, \forall (i,j) \in E$.
- Für alle $k : 1 \leqslant k \leqslant m$ und alle $i : 1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\sum_{j:(i,j)\in E} X_{ij}^k - \sum_{j:(j,i)\in E} X_{ji}^k = \begin{cases} 1 & \text{falls } src(k) = i \\ -1 & \text{falls } dst(k) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Dies ist eine korrekte Formulierung des Routen- und Wellenlängenzuweisungsproblems als ILP.

Routing und Wellenlängenzuweisung als ILP

$n = N_E + N_R$
$src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (1 \leqslant k \leqslant m)$
X_{ij}^k : k-te Weg nutzt Kante (i, j)

- Minimiere Zielfunktion Ω_{max}.
- $\sum_{k=1}^{m} X_{ij}^k \leqslant \Omega_{max}, \forall (i,j) \in E$.
- Für alle $k : 1 \leqslant k \leqslant m$ und alle $i : 1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\sum_{j:(i,j)\in E} X_{ij}^k - \sum_{j:(j,i)\in E} X_{ji}^k = \begin{cases} 1 & \text{falls } src(k) = i \\ -1 & \text{falls } dst(k) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Dies ist eine korrekte Formulierung des Routen- und Wellenlängenzuweisungsproblems als ILP.
- Komplexität:

Routing und Wellenlängenzuweisung als ILP

$n = N_E + N_R$
$src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (\mathbf{1} \leqslant k \leqslant m)$
X_{ij}^k : k**-te Weg nutzt Kante** (i,j)

- Minimiere Zielfunktion Ω_{max}.
- $\sum_{k=1}^m X_{ij}^k \leqslant \Omega_{max}, \forall (i,j) \in E$.
- Für alle $k : 1 \leqslant k \leqslant m$ und alle $i : 1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\sum_{j:(i,j)\in E} X_{ij}^k - \sum_{j:(j,i)\in E} X_{ji}^k = \begin{cases} 1 & \text{falls } src(k) = i \\ -1 & \text{falls } dst(k) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Dies ist eine korrekte Formulierung des Routen- und Wellenlängenzuweisungsproblems als ILP.
- Komplexität:
  - $m \cdot |E|$ Variablen der Form X_{ij}^k.

Routing und Wellenlängenzuweisung als ILP

$n = N_E + N_R$
$src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (1 \leqslant k \leqslant m)$
X_{ij}^k : k-te Weg nutzt Kante (i,j)

- Minimiere Zielfunktion Ω_{max}.
- $\sum_{k=1}^{m} X_{ij}^k \leqslant \Omega_{max}, \forall (i,j) \in E$.
- Für alle $k : 1 \leqslant k \leqslant m$ und alle $i : 1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\sum_{j:(i,j)\in E} X_{ij}^k - \sum_{j:(j,i)\in E} X_{ji}^k = \begin{cases} 1 & \text{falls } src(k) = i \\ -1 & \text{falls } dst(k) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Dies ist eine korrekte Formulierung des Routen- und Wellenlängenzuweisungsproblems als ILP.
- Komplexität:
  - $m \cdot |E|$ Variablen der Form X_{ij}^k.
  - Eine Variable Ω_{max}.

Routing und Wellenlängenzuweisung als ILP

$n = N_E + N_R$
$src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (1 \leqslant k \leqslant m)$
X_{ij}^k : k-te Weg nutzt Kante (i,j)

- Minimiere Zielfunktion Ω_{max}.
- $\sum_{k=1}^m X_{ij}^k \leqslant \Omega_{max}, \forall (i,j) \in E$.
- Für alle $k : 1 \leqslant k \leqslant m$ und alle $i : 1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\sum_{j:(i,j)\in E} X_{ij}^k - \sum_{j:(j,i)\in E} X_{ji}^k = \begin{cases} 1 & \text{falls } src(k) = i \\ -1 & \text{falls } dst(k) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Dies ist eine korrekte Formulierung des Routen- und Wellenlängenzuweisungsproblems als ILP.
- Komplexität:
  - $m \cdot |E|$ Variablen der Form X_{ij}^k.
  - Eine Variable Ω_{max}.
  - Nebenbedingungen: $|E| + n \cdot m$.

Routing und Wellenlängenzuweisung als ILP

$n = N_E + N_R$
$src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (1 \leqslant k \leqslant m)$
X_{ij}^k : k**-te Weg nutzt Kante** (i,j)

- Minimiere Zielfunktion Ω_{max}.
- $\sum_{k=1}^{m} X_{ij}^k \leqslant \Omega_{max}, \forall (i,j) \in E$.
- Für alle $k : 1 \leqslant k \leqslant m$ und alle $i : 1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\sum_{j:(i,j)\in E} X_{ij}^k - \sum_{j:(j,i)\in E} X_{ji}^k = \begin{cases} 1 & \text{falls } src(k) = i \\ -1 & \text{falls } dst(k) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Dies ist eine korrekte Formulierung des Routen- und Wellenlängenzuweisungsproblems als ILP.
- Komplexität:
  - $m \cdot |E|$ Variablen der Form X_{ij}^k.
  - Eine Variable Ω_{max}.
  - Nebenbedingungen: $|E| + n \cdot m$.
  - Schon für relativ kleine Netzwerke zu aufwendig.

Routing und Wellenlängenzuweisung als ILP

$n = N_E + N_R$
$src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (1 \leqslant k \leqslant m)$
X_{ij}^k : k-**te Weg nutzt Kante** (i,j)

- Minimiere Zielfunktion Ω_{max}.
- $\sum_{k=1}^{m} X_{ij}^k \leqslant \Omega_{max}, \forall (i,j) \in E$.
- Für alle $k : 1 \leqslant k \leqslant m$ und alle $i : 1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\sum_{j:(i,j)\in E} X_{ij}^k - \sum_{j:(j,i)\in E} X_{ji}^k = \begin{cases} 1 & \text{falls } src(k) = i \\ -1 & \text{falls } dst(k) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Dies ist eine korrekte Formulierung des Routen- und Wellenlängenzuweisungsproblems als ILP.
- Komplexität:
  - $m \cdot |E|$ Variablen der Form X_{ij}^k.
  - Eine Variable Ω_{max}.
  - Nebenbedingungen: $|E| + n \cdot m$.
  - Schon für relativ kleine Netzwerke zu aufwendig.

Routen- und Wellenlängenzuweisung

- N_E Endknoten; N_R Router ohne Konverter.

Routen- und Wellenlängenzuweisung

- N_E Endknoten; N_R Router ohne Konverter.
- $n = N_E + N_R$; Namen der Knoten: N_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Routen- und Wellenlängenzuweisung

- N_E Endknoten; N_R Router ohne Konverter.
- $n = N_E + N_R$; Namen der Knoten: N_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
- m Anzahl der Lichtwege; n_{ch} Anzahl der Wellenlängen.

Routen- und Wellenlängenzuweisung

- N_E Endknoten; N_R Router ohne Konverter.
- $n = N_E + N_R$; Namen der Knoten: N_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
- m Anzahl der Lichtwege; n_{ch} Anzahl der Wellenlängen.
- E: $(i, j) \in E \iff$ Kante von N_i nach N_j.

Routen- und Wellenlängenzuweisung

- N_E Endknoten; N_R Router ohne Konverter.
- $n = N_E + N_R$; Namen der Knoten: N_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
- m Anzahl der Lichtwege; n_{ch} Anzahl der Wellenlängen.
- E: $(i, j) \in E \iff$ Kante von N_i nach N_j.
- $src(k)$: ist Startknoten der k-ten Anfrage.

Routen- und Wellenlängenzuweisung

- N_E Endknoten; N_R Router ohne Konverter.
- $n = N_E + N_R$; Namen der Knoten: N_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
- m Anzahl der Lichtwege; n_{ch} Anzahl der Wellenlängen.
- E: $(i, j) \in E \Longleftrightarrow$ Kante von N_i nach N_j.
- $src(k)$: ist Startknoten der k-ten Anfrage.
- $dst(k)$: ist Endknoten der k-ten Anfrage.

Routen- und Wellenlängenzuweisung

- N_E Endknoten; N_R Router ohne Konverter.
- $n = N_E + N_R$; Namen der Knoten: N_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
- m Anzahl der Lichtwege; n_{ch} Anzahl der Wellenlängen.
- E: $(i, j) \in E \iff$ Kante von N_i nach N_j.
- $src(k)$: ist Startknoten der k-ten Anfrage.
- $dst(k)$: ist Endknoten der k-ten Anfrage.
- Ω_{max}: Congestion des Netzwerks.

Routen- und Wellenlängenzuweisung

- N_E Endknoten; N_R Router ohne Konverter.
- $n = N_E + N_R$; Namen der Knoten: N_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
- m Anzahl der Lichtwege; n_{ch} Anzahl der Wellenlängen.
- E: $(i,j) \in E \iff$ Kante von N_i nach N_j.
- $src(k)$: ist Startknoten der k-ten Anfrage.
- $dst(k)$: ist Endknoten der k-ten Anfrage.
- Ω_{max}: Congestion des Netzwerks.
- $X_{ij}^{wk} \in \{0,1\}$ mit:

$$X_{ij}^{wk} = \begin{cases} 1 & \text{der } k\text{-te Weg nutzt } (i,j) \in E \text{ und W.länge } w \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Routen- und Wellenlängenzuweisung

- N_E Endknoten; N_R Router ohne Konverter.
- $n = N_E + N_R$; Namen der Knoten: N_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
- m Anzahl der Lichtwege; n_{ch} Anzahl der Wellenlängen.
- E: $(i,j) \in E \iff$ Kante von N_i nach N_j.
- $src(k)$: ist Startknoten der k-ten Anfrage.
- $dst(k)$: ist Endknoten der k-ten Anfrage.
- Ω_{max}: Congestion des Netzwerks.
- $X_{ij}^{wk} \in \{0,1\}$ mit:

$$X_{ij}^{wk} = \begin{cases} 1 & \text{der } k\text{-te Weg nutzt } (i,j) \in E \text{ und W.länge } w \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- $Y_w^k \in \{0,1\}$ mit:

$$Y_w^k = \begin{cases} 1 & \text{der } k\text{-te Weg nutzt Wellenlänge } w \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Routen- und Wellenlängenzuweisung

- N_E Endknoten; N_R Router ohne Konverter.
- $n = N_E + N_R$; Namen der Knoten: N_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
- m Anzahl der Lichtwege; n_{ch} Anzahl der Wellenlängen.
- E: $(i,j) \in E \iff$ Kante von N_i nach N_j.
- $src(k)$: ist Startknoten der k-ten Anfrage.
- $dst(k)$: ist Endknoten der k-ten Anfrage.
- Ω_{max}: Congestion des Netzwerks.
- $X_{ij}^{wk} \in \{0,1\}$ mit:

$$X_{ij}^{wk} = \begin{cases} 1 & \text{der } k\text{-te Weg nutzt } (i,j) \in E \text{ und W.länge } w \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- $Y_w^k \in \{0,1\}$ mit:

$$Y_w^k = \begin{cases} 1 & \text{der } k\text{-te Weg nutzt Wellenlänge } w \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ILP:

$n = N_E + N_R$
$src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (1 \leqslant k \leqslant m)$
X_{ij}^k : k**-te Weg nutzt Kante** (i,j)
Y_w^k : k**-te Weg nutzt Wellenlänge** w

- Minimiere Zielfunktion Ω_{max}:

$$\sum_{w=1}^{n_{ch}} \sum_{k=1}^{m} X_{ij}^{wk} \leqslant \Omega_{max}, \forall (i,j) \in E$$

ILP:

$n = N_E + N_R$
$src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (1 \leqslant k \leqslant m)$
X_{ij}^k : **k-te Weg nutzt Kante** (i,j)
Y_w^k : **k-te Weg nutzt Wellenlänge** w

- Minimiere Zielfunktion Ω_{max}:

$$\sum_{w=1}^{n_{ch}} \sum_{k=1}^{m} X_{ij}^{wk} \leqslant \Omega_{max}, \forall (i,j) \in E$$

- Für alle $k, w : 1 \leqslant k \leqslant m, 1 \leqslant w \leqslant n_{ch}$ und alle $i : 1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\sum_{j:(i,j)\in E} X_{ij}^{wk} - \sum_{j:(j,i)\in E} X_{ji}^{wk} = \begin{cases} Y_w^k & \text{falls } src(k) = i \\ -Y_w^k & \text{falls } dst(k) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ILP:

$n = N_E + N_R$
$src(k) \longleftrightarrow dst(k)$: $(1 \leqslant k \leqslant m)$
X_{ij}^k : k-te Weg nutzt Kante (i,j)
Y_w^k : k-te Weg nutzt Wellenlänge w

- Minimiere Zielfunktion Ω_{max}:

$$\sum_{w=1}^{n_{ch}} \sum_{k=1}^{m} X_{ij}^{wk} \leqslant \Omega_{max}, \forall (i,j) \in E$$

- Für alle $k, w : 1 \leqslant k \leqslant m, 1 \leqslant w \leqslant n_{ch}$ und alle $i : 1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\sum_{j:(i,j)\in E} X_{ij}^{wk} - \sum_{j:(j,i)\in E} X_{ji}^{wk} = \begin{cases} Y_w^k & \text{falls } src(k) = i \\ -Y_w^k & \text{falls } dst(k) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Für alle $k : 1 \leqslant k \leqslant m$:

$$\sum_{w=1}^{n_{ch}} Y_w^k = 1$$

ILP:

$n = N_E + N_R$
$src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (1 \leqslant k \leqslant m)$
X_{ij}^k : k-te Weg nutzt Kante (i,j)
Y_w^k : k-te Weg nutzt Wellenlänge w

- Minimiere Zielfunktion Ω_{max}:

$$\sum_{w=1}^{n_{ch}} \sum_{k=1}^{m} X_{ij}^{wk} \leqslant \Omega_{max}, \forall (i,j) \in E$$

- Für alle $k, w : 1 \leqslant k \leqslant m, 1 \leqslant w \leqslant n_{ch}$ und alle $i : 1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\sum_{j:(i,j)\in E} X_{ij}^{wk} - \sum_{j:(j,i)\in E} X_{ji}^{wk} = \begin{cases} Y_w^k & \text{falls } src(k) = i \\ -Y_w^k & \text{falls } dst(k) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Für alle $k : 1 \leqslant k \leqslant m$:

$$\sum_{w=1}^{n_{ch}} Y_w^k = 1$$

- Für alle $w : 1 \leqslant w \leqslant n_{ch}$ und alle $(i,j) \in E$:

$$\sum_{k=1}^{m} X_{ij}^{wk} \leqslant 1$$

ILP:

$n = N_E + N_R$
$src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (1 \leqslant k \leqslant m)$
X_{ij}^k : k-te Weg nutzt Kante (i,j)
Y_w^k : k-te Weg nutzt Wellenlänge w

- Minimiere Zielfunktion Ω_{max}:

$$\sum_{w=1}^{n_{ch}} \sum_{k=1}^{m} X_{ij}^{wk} \leqslant \Omega_{max}, \forall (i,j) \in E$$

- Für alle $k, w : 1 \leqslant k \leqslant m, 1 \leqslant w \leqslant n_{ch}$ und alle $i : 1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\sum_{j:(i,j)\in E} X_{ij}^{wk} - \sum_{j:(j,i)\in E} X_{ji}^{wk} = \begin{cases} Y_w^k & \text{falls } src(k) = i \\ -Y_w^k & \text{falls } dst(k) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Für alle $k : 1 \leqslant k \leqslant m$:

$$\sum_{w=1}^{n_{ch}} Y_w^k = 1$$

- Für alle $w : 1 \leqslant w \leqslant n_{ch}$ und alle $(i,j) \in E$:

$$\sum_{k=1}^{m} X_{ij}^{wk} \leqslant 1$$

Kanonische Form eines LP

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:

Kanonische Form eines LP

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$,

Kanonische Form eines LP

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$,
  - Werte $c_j \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$,

Kanonische Form eines LP

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$,
  - Werte $c_j \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$,
  - Werte $b_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ und

Kanonische Form eines LP

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$,
  - Werte $c_j \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$,
  - Werte $b_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ und
  - Werte $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$ und $1 \leqslant i \leqslant m$.

Kanonische Form eines LP

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$,
  - Werte $c_j \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$,
  - Werte $b_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ und
  - Werte $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$ und $1 \leqslant i \leqslant m$.
  - Gesucht ist eine Belegung der Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ mit:

Kanonische Form eines LP

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$,
  - Werte $c_j \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$,
  - Werte $b_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ und
  - Werte $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$ und $1 \leqslant i \leqslant m$.
  - Gesucht ist eine Belegung der Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ mit:
    - Maximiere Zielfunktion $\sum_{j=1}^{d} c_j \cdot x_j$

Kanonische Form eines LP

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$,
  - Werte $c_j \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$,
  - Werte $b_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ und
  - Werte $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$ und $1 \leqslant i \leqslant m$.
  - Gesucht ist eine Belegung der Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ mit:
    - Maximiere Zielfunktion $\sum_{j=1}^{d} c_j \cdot x_j$
    - unter den Nebenbedingungen:

Kanonische Form eines LP

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$,
  - Werte $c_j \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$,
  - Werte $b_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ und
  - Werte $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$ und $1 \leqslant i \leqslant m$.
  - Gesucht ist eine Belegung der Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ mit:
    - Maximiere Zielfunktion $\sum_{j=1}^{d} c_j \cdot x_j$
    - unter den Nebenbedingungen:
    - $\sum_{j=1}^{d} a_{ij} \cdot x_j \leqslant b_j$ für $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ und

Kanonische Form eines LP

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$,
  - Werte $c_j \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$,
  - Werte $b_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ und
  - Werte $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$ und $1 \leqslant i \leqslant m$.
  - Gesucht ist eine Belegung der Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ mit:
    - Maximiere Zielfunktion $\sum_{j=1}^{d} c_j \cdot x_j$
    - unter den Nebenbedingungen:
    - $\sum_{j=1}^{d} a_{ij} \cdot x_j \leqslant b_j$ für $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ und
    - $x_j \geqslant 0$ für $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$.

Kanonische Form eines LP

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$,
  - Werte $c_j \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$,
  - Werte $b_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ und
  - Werte $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$ und $1 \leqslant i \leqslant m$.
  - Gesucht ist eine Belegung der Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ mit:
    - Maximiere Zielfunktion $\sum_{j=1}^{d} c_j \cdot x_j$
    - unter den Nebenbedingungen:
    - $\sum_{j=1}^{d} a_{ij} \cdot x_j \leqslant b_j$ für $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ und
    - $x_j \geqslant 0$ für $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$.
- Setze:

Kanonische Form eines LP

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$,
  - Werte $c_j \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$,
  - Werte $b_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ und
  - Werte $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$ und $1 \leqslant i \leqslant m$.
  - Gesucht ist eine Belegung der Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ mit:
    - Maximiere Zielfunktion $\sum_{j=1}^{d} c_j \cdot x_j$
    - unter den Nebenbedingungen:
    - $\sum_{j=1}^{d} a_{ij} \cdot x_j \leqslant b_j$ für $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ und
    - $x_j \geqslant 0$ für $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$.
- Setze:
  - $x = (x_j)$, $c = (c_j)$, $b = (b_i)$ und $A = (a_{ij})$.

Kanonische Form eines LP

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$,
  - Werte $c_j \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$,
  - Werte $b_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ und
  - Werte $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$ und $1 \leqslant i \leqslant m$.
  - Gesucht ist eine Belegung der Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ mit:
    - Maximiere Zielfunktion $\sum_{j=1}^{d} c_j \cdot x_j$
    - unter den Nebenbedingungen:
    - $\sum_{j=1}^{d} a_{ij} \cdot x_j \leqslant b_j$ für $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ und
    - $x_j \geqslant 0$ für $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$.
- Setze:
  - $x = (x_j)$, $c = (c_j)$, $b = (b_i)$ und $A = (a_{ij})$.
- Dann ist kurzgefasst die kanonische Form:

Kanonische Form eines LP

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$,
  - Werte $c_j \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$,
  - Werte $b_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ und
  - Werte $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$ und $1 \leqslant i \leqslant m$.
  - Gesucht ist eine Belegung der Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ mit:
    - Maximiere Zielfunktion $\sum_{j=1}^{d} c_j \cdot x_j$
    - unter den Nebenbedingungen:
    - $\sum_{j=1}^{d} a_{ij} \cdot x_j \leqslant b_j$ für $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ und
    - $x_j \geqslant 0$ für $j \in \{1, 2, \dots, d\}$.
- Setze:
  - $x = (x_j)$, $c = (c_j)$, $b = (b_i)$ und $A = (a_{ij})$.
- Dann ist kurzgefasst die kanonische Form:
  - Maximiere $c^T \cdot x$ unter den Nebenbedingungen:

Kanonische Form eines LP

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$,
  - Werte $c_j \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$,
  - Werte $b_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ und
  - Werte $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$ und $1 \leqslant i \leqslant m$.
  - Gesucht ist eine Belegung der Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ mit:
    - Maximiere Zielfunktion $\sum_{j=1}^{d} c_j \cdot x_j$
    - unter den Nebenbedingungen:
    - $\sum_{j=1}^{d} a_{ij} \cdot x_j \leqslant b_j$ für $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ und
    - $x_j \geqslant 0$ für $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$.
- Setze:
  - $x = (x_j)$, $c = (c_j)$, $b = (b_i)$ und $A = (a_{ij})$.
- Dann ist kurzgefasst die kanonische Form:
  - Maximiere $c^T \cdot x$ unter den Nebenbedingungen:
  - $A \cdot x \leqslant b$ und $x \geqslant 0$.

Kanonische Form eines LP

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$,
  - Werte $c_j \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$,
  - Werte $b_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ und
  - Werte $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$ und $1 \leqslant i \leqslant m$.
  - Gesucht ist eine Belegung der Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ mit:
    - Maximiere Zielfunktion $\sum_{j=1}^{d} c_j \cdot x_j$
    - unter den Nebenbedingungen:
    - $\sum_{j=1}^{d} a_{ij} \cdot x_j \leqslant b_j$ für $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ und
    - $x_j \geqslant 0$ für $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$.
- Setze:
  - $x = (x_j)$, $c = (c_j)$, $b = (b_i)$ und $A = (a_{ij})$.
- Dann ist kurzgefasst die kanonische Form:
  - Maximiere $c^T \cdot x$ unter den Nebenbedingungen:
  - $A \cdot x \leqslant b$ und $x \geqslant 0$.

Umformungen zur kanonischen Form

- Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem:

Umformungen zur kanonischen Form

- Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem:
  - $c^T \cdot x$ wird zu $-c^T \cdot x$.

Umformungen zur kanonischen Form

- Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem:
  - $c^T \cdot x$ wird zu $-c^T \cdot x$.
- Eine Gleichung $a^T \cdot x = b$ wird ersetzt durch

Umformungen zur kanonischen Form

- Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem:
  - $c^T \cdot x$ wird zu $-c^T \cdot x$.
- Eine Gleichung $a^T \cdot x = b$ wird ersetzt durch
  - $a^T \cdot x \leqslant b$ und

Umformungen zur kanonischen Form

- Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem:
  - $c^T \cdot x$ wird zu $-c^T \cdot x$.
- Eine Gleichung $a^T \cdot x = b$ wird ersetzt durch
  - $a^T \cdot x \leqslant b$ und
  - $a^T \cdot x \geqslant b$.

Umformungen zur kanonischen Form

- Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem:
  - $c^T \cdot x$ wird zu $-c^T \cdot x$.
- Eine Gleichung $a^T \cdot x = b$ wird ersetzt durch
  - $a^T \cdot x \leqslant b$ und
  - $a^T \cdot x \geqslant b$.
- Eine Gleichung $a^T \cdot x \geqslant b$ wird ersetzt durch

Umformungen zur kanonischen Form

- Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem:
  - $c^T \cdot x$ wird zu $-c^T \cdot x$.
- Eine Gleichung $a^T \cdot x = b$ wird ersetzt durch
  - $a^T \cdot x \leqslant b$ und
  - $a^T \cdot x \geqslant b$.
- Eine Gleichung $a^T \cdot x \geqslant b$ wird ersetzt durch
  - $-a^T \cdot x \leqslant -b$.

Umformungen zur kanonischen Form

- Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem:
  - $c^T \cdot x$ wird zu $-c^T \cdot x$.
- Eine Gleichung $a^T \cdot x = b$ wird ersetzt durch
  - $a^T \cdot x \leqslant b$ und
  - $a^T \cdot x \geqslant b$.
- Eine Gleichung $a^T \cdot x \geqslant b$ wird ersetzt durch
  - $-a^T \cdot x \leqslant -b$.
- Eine möglicherweise negative Variable $x \in \mathbb{R}$ wird ersetzt durch:

Umformungen zur kanonischen Form

- Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem:
  - $c^T \cdot x$ wird zu $-c^T \cdot x$.
- Eine Gleichung $a^T \cdot x = b$ wird ersetzt durch
  - $a^T \cdot x \leqslant b$ und
  - $a^T \cdot x \geqslant b$.
- Eine Gleichung $a^T \cdot x \geqslant b$ wird ersetzt durch
  - $-a^T \cdot x \leqslant -b$.
- Eine möglicherweise negative Variable $x \in \mathbb{R}$ wird ersetzt durch:
  - $x' - x''$ und den Nebenbedingungen:

Umformungen zur kanonischen Form

- Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem:
  - $c^T \cdot x$ wird zu $-c^T \cdot x$.
- Eine Gleichung $a^T \cdot x = b$ wird ersetzt durch
  - $a^T \cdot x \leqslant b$ und
  - $a^T \cdot x \geqslant b$.
- Eine Gleichung $a^T \cdot x \geqslant b$ wird ersetzt durch
  - $-a^T \cdot x \leqslant -b$.
- Eine möglicherweise negative Variable $x \in \mathbb{R}$ wird ersetzt durch:
  - $x' - x''$ und den Nebenbedingungen:
  - $x' \geqslant 0$ und

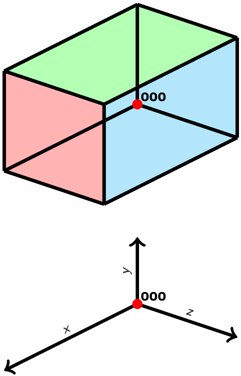
Umformungen zur kanonischen Form

- Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem:
  - $c^T \cdot x$ wird zu $-c^T \cdot x$.
- Eine Gleichung $a^T \cdot x = b$ wird ersetzt durch
  - $a^T \cdot x \leqslant b$ und
  - $a^T \cdot x \geqslant b$.
- Eine Gleichung $a^T \cdot x \geqslant b$ wird ersetzt durch
  - $-a^T \cdot x \leqslant -b$.
- Eine möglicherweise negative Variable $x \in \mathbb{R}$ wird ersetzt durch:
  - $x' - x''$ und den Nebenbedingungen:
  - $x' \geqslant 0$ und
  - $x'' \geqslant 0$.

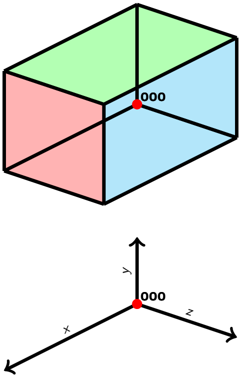
Umformungen zur kanonischen Form

- Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem:
  - $c^T \cdot x$ wird zu $-c^T \cdot x$.
- Eine Gleichung $a^T \cdot x = b$ wird ersetzt durch
  - $a^T \cdot x \leqslant b$ und
  - $a^T \cdot x \geqslant b$.
- Eine Gleichung $a^T \cdot x \geqslant b$ wird ersetzt durch
  - $-a^T \cdot x \leqslant -b$.
- Eine möglicherweise negative Variable $x \in \mathbb{R}$ wird ersetzt durch:
  - $x' - x''$ und den Nebenbedingungen:
  - $x' \geqslant 0$ und
  - $x'' \geqslant 0$.

Geometrische Interpretation



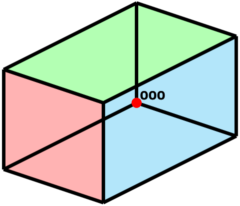
Geometrische Interpretation

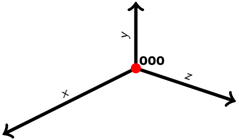


$$0 \leqslant x \leqslant t$$
$$0 \leqslant y \leqslant t$$
$$0 \leqslant z \leqslant t$$

- Eine Variablenbelegung $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ entspricht einem Punkt im d-dimensionalen Raum.

Geometrische Interpretation

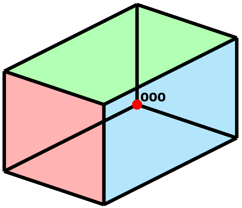


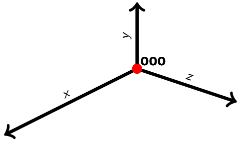


$$0 \leqslant x \leqslant t$$
$$0 \leqslant y \leqslant t$$
$$0 \leqslant z \leqslant t$$

- Eine Variablenbelegung $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ entspricht einem Punkt im d-dimensionalen Raum.
- Eine Nebenbedingung $a_i \cdot x \leqslant b_i$ definiert einen Halbraum.

Geometrische Interpretation

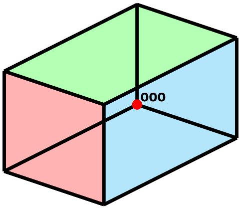


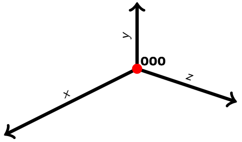


$$0 \leqslant x \leqslant t$$
$$0 \leqslant y \leqslant t$$
$$0 \leqslant z \leqslant t$$

- Eine Variablenbelegung $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ entspricht einem Punkt im d-dimensionalen Raum.
- Eine Nebenbedingung $a_i \cdot x \leqslant b_i$ definiert einen Halbraum.
- Die Grenze des Halbraums ist die Hyperebene $a_i \cdot x = b_i$.

Geometrische Interpretation

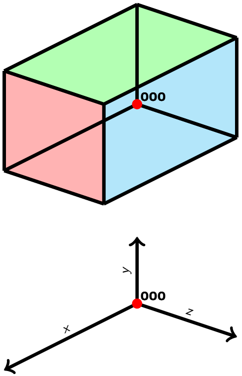




$$0 \leqslant x \leqslant t$$
$$0 \leqslant y \leqslant t$$
$$0 \leqslant z \leqslant t$$

- Eine Variablenbelegung $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ entspricht einem Punkt im d-dimensionalen Raum.
- Eine Nebenbedingung $a_i \cdot x \leqslant b_i$ definiert einen Halbraum.
- Die Grenze des Halbraums ist die Hyperebene $a_i \cdot x = b_i$.
- Der Schnitt aller Halbräume ist der Raum der zulässigen Lösungen.

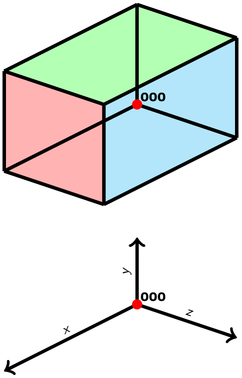
Geometrische Interpretation



$$0 \leqslant x \leqslant t$$
$$0 \leqslant y \leqslant t$$
$$0 \leqslant z \leqslant t$$

- Eine Variablenbelegung $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ entspricht einem Punkt im d-dimensionalen Raum.
- Eine Nebenbedingung $a_i \cdot x \leqslant b_i$ definiert einen Halbraum.
- Die Grenze des Halbraums ist die Hyperebene $a_i \cdot x = b_i$.
- Der Schnitt aller Halbräume ist der Raum der zulässigen Lösungen.
- Ein LP wird als zulässig bezeichnet, wenn des zulässige Lösungen gibt.

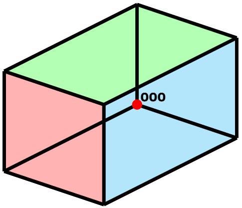
Geometrische Interpretation

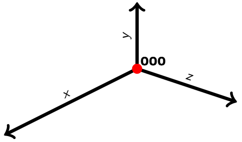


$$0 \leqslant x \leqslant t$$
$$0 \leqslant y \leqslant t$$
$$0 \leqslant z \leqslant t$$

- Eine Variablenbelegung $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ entspricht einem Punkt im d-dimensionalen Raum.
- Eine Nebenbedingung $a_i \cdot x \leqslant b_i$ definiert einen Halbraum.
- Die Grenze des Halbraums ist die Hyperebene $a_i \cdot x = b_i$.
- Der Schnitt aller Halbräume ist der Raum der zulässigen Lösungen.
- Ein LP wird als zulässig bezeichnet, wenn des zulässige Lösungen gibt.
- Schnittmengen von Halbräumen bilden ein Polyhedron.

Geometrische Interpretation

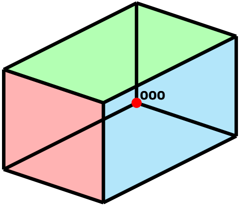


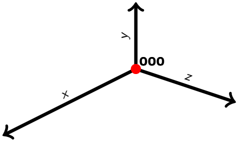


$$0 \leqslant x \leqslant t$$
$$0 \leqslant y \leqslant t$$
$$0 \leqslant z \leqslant t$$

- Eine Variablenbelegung $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ entspricht einem Punkt im d-dimensionalen Raum.
- Eine Nebenbedingung $a_i \cdot x \leqslant b_i$ definiert einen Halbraum.
- Die Grenze des Halbraums ist die Hyperebene $a_i \cdot x = b_i$.
- Der Schnitt aller Halbräume ist der Raum der zulässigen Lösungen.
- Ein LP wird als zulässig bezeichnet, wenn des zulässige Lösungen gibt.
- Schnittmengen von Halbräumen bilden ein Polyhedron.
- Damit bilden die zulässigen Lösungen ein Polyhedron.

Geometrische Interpretation





$$0 \leqslant x \leqslant t$$
$$0 \leqslant y \leqslant t$$
$$0 \leqslant z \leqslant t$$

- Eine Variablenbelegung $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ entspricht einem Punkt im d-dimensionalen Raum.
- Eine Nebenbedingung $a_i \cdot x \leqslant b_i$ definiert einen Halbraum.
- Die Grenze des Halbraums ist die Hyperebene $a_i \cdot x = b_i$.
- Der Schnitt aller Halbräume ist der Raum der zulässigen Lösungen.
- Ein LP wird als zulässig bezeichnet, wenn des zulässige Lösungen gibt.
- Schnittmengen von Halbräumen bilden ein Polyhedron.
- Damit bilden die zulässigen Lösungen ein Polyhedron.

Konvexität

P **Polyhedron**

Lemma

Ein Polyhedron P ist konvex.

Beweis:

Konvexität

P **Polyhedron**

Lemma

Ein Polyhedron P ist konvex.

Beweis:

Konvexität

P **Polyhedron**

Lemma

Ein Polyhedron P ist konvex.

Beweis:

- Konvex: $\forall a, b \in P : l(a, b) \in P$ mit:

Konvexität

P **Polyhedron**

Lemma

Ein Polyhedron P ist konvex.

Beweis:

- Konvex: $\forall a, b \in P : l(a, b) \in P$ mit:
- $l(a, b) = \{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$.

Konvexität

P **Polyhedron**

Lemma

Ein Polyhedron P ist konvex.

Beweis:

- Konvex: $\forall a, b \in P : l(a, b) \in P$ mit:
- $l(a, b) = \{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$.
- Ein Halbraum ist konvex.

Konvexität

P **Polyhedron**

Lemma

Ein Polyhedron P ist konvex.

Beweis:

- Konvex: $\forall a, b \in P : l(a, b) \in P$ mit:
- $l(a, b) = \{\lambda a + (1 - \lambda) b \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$.
- Ein Halbraum ist konvex.
- Ein Polyhedron ist der Schnitt von Halbräumen.

Konvexität

Lemma

Ein Polyhedron P ist konvex.

Beweis:

- Konvex: $\forall a, b \in P : l(a, b) \in P$ mit:
- $l(a, b) = \{\lambda a + (1 - \lambda) b \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$.
- Ein Halbraum ist konvex.
- Ein Polyhedron ist der Schnitt von Halbräumen.
- Zeige: Der Schnitt von konvexen Mengen ist konvex.

Konvexität

Lemma

Ein Polyhedron P ist konvex.

Beweis:

- Konvex: $\forall a, b \in P : l(a, b) \in P$ mit:
- $l(a, b) = \{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$.
- Ein Halbraum ist konvex.
- Ein Polyhedron ist der Schnitt von Halbräumen.
- Zeige: Der Schnitt von konvexen Mengen ist konvex.
- D.h. aus A, B konvex folgt $A \cap B$ konvex.

Konvexität

Lemma

Ein Polyhedron P ist konvex.

Beweis:

- Konvex: $\forall a, b \in P : l(a, b) \in P$ mit:
- $l(a, b) = \{\lambda a + (1 - \lambda) b \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$.
- Ein Halbraum ist konvex.
- Ein Polyhedron ist der Schnitt von Halbräumen.
- Zeige: Der Schnitt von konvexen Mengen ist konvex.
- D.h. aus A, B konvex folgt $A \cap B$ konvex.
- Damit gilt: $\forall a, b \in A : l(a, b) \in A$ und

Konvexität

Lemma

Ein Polyhedron P ist konvex.

Beweis:

- Konvex: $\forall a, b \in P : l(a, b) \in P$ mit:
- $l(a, b) = \{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$.
- Ein Halbraum ist konvex.
- Ein Polyhedron ist der Schnitt von Halbräumen.
- Zeige: Der Schnitt von konvexen Mengen ist konvex.
- D.h. aus A, B konvex folgt $A \cap B$ konvex.
- Damit gilt: $\forall a, b \in A : l(a, b) \in A$ und
- weiter $\forall a, b \in B : l(a, b) \in B$.

Konvexität

P **Polyhedron**

Lemma

Ein Polyhedron P ist konvex.

Beweis:

- Konvex: $\forall a, b \in P : l(a, b) \in P$ mit:
- $l(a, b) = \{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$.
- Ein Halbraum ist konvex.
- Ein Polyhedron ist der Schnitt von Halbräumen.
- Zeige: Der Schnitt von konvexen Mengen ist konvex.
- D.h. aus A, B konvex folgt $A \cap B$ konvex.
- Damit gilt: $\forall a, b \in A : l(a, b) \in A$ und
- weiter $\forall a, b \in B : l(a, b) \in B$.
- Es folgt: $\forall a, b \in A \cap B : l(a, b) \in A \cap B$.

Konvexität

P **Polyhedron**

Lemma

Ein Polyhedron P ist konvex.

Beweis:

- Konvex: $\forall a, b \in P : l(a, b) \in P$ mit:
- $l(a, b) = \{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$.
- Ein Halbraum ist konvex.
- Ein Polyhedron ist der Schnitt von Halbräumen.
- Zeige: Der Schnitt von konvexen Mengen ist konvex.
- D.h. aus A, B konvex folgt $A \cap B$ konvex.
- Damit gilt: $\forall a, b \in A : l(a, b) \in A$ und
- weiter $\forall a, b \in B : l(a, b) \in B$.
- Es folgt: $\forall a, b \in A \cap B : l(a, b) \in A \cap B$.

Lokales und globales Optimum

P **Polyhedron**

Lemma

Sei $z, x \in P$ und $c^T z > c^T x$.
Dann existiert für $\varepsilon > 0$ ein $y \in P$ mit: $||x - y|| \leqslant \varepsilon$ und $c^T y > c^T x$.

Beweis:

Lokales und globales Optimum

P **Polyhedron**

Lemma

Sei $z, x \in P$ *und* $c^T z > c^T x$.
Dann existiert für $\varepsilon > 0$ *ein* $y \in P$ *mit:* $||x - y|| \leqslant \varepsilon$ *und* $c^T y > c^T x$.

Beweis:

Lokales und globales Optimum

P **Polyhedron**

Lemma

Sei $z, x \in P$ und $c^T z > c^T x$.
Dann existiert für $\varepsilon > 0$ ein $y \in P$ mit: $||x - y|| \leqslant \varepsilon$ und $c^T y > c^T x$.

Beweis:

- P ist konvex, gilt $l(x, z) \in P$.

Lokales und globales Optimum

Lemma

Sei $z, x \in P$ und $c^T z > c^T x$.
Dann existiert für $\varepsilon > 0$ ein $y \in P$ mit: $||x - y|| \leqslant \varepsilon$ und $c^T y > c^T x$.

Beweis:

- P ist konvex, gilt $l(x, z) \in P$.
- Wähle $y \in l(x, z)$ mit $x \neq y$ und $||x - y|| \leqslant \varepsilon$.

Lokales und globales Optimum

Lemma

Sei $z, x \in P$ und $c^T z > c^T x$.
Dann existiert für $\varepsilon > 0$ ein $y \in P$ mit: $||x - y|| \leqslant \varepsilon$ und $c^T y > c^T x$.

Beweis:

- P ist konvex, gilt $l(x, z) \in P$.
- Wähle $y \in l(x, z)$ mit $x \neq y$ und $||x - y|| \leqslant \varepsilon$.
- Nach Definition von l gibt $\lambda > 0$ mit: $y = \lambda x + (1 - \lambda) z$.

Lokales und globales Optimum

Lemma

Sei $z, x \in P$ und $c^T z > c^T x$.
Dann existiert für $\varepsilon > 0$ ein $y \in P$ mit: $||x - y|| \leqslant \varepsilon$ und $c^T y > c^T x$.

Beweis:

- P ist konvex, gilt $l(x, z) \in P$.
- Wähle $y \in l(x, z)$ mit $x \neq y$ und $||x - y|| \leqslant \varepsilon$.
- Nach Definition von l gibt $\lambda > 0$ mit: $y = \lambda x + (1 - \lambda) z$.
- Es folgt:

$$c^T y \quad = \quad c^T(\lambda x + (1 - \lambda) z)$$

Lokales und globales Optimum

Lemma

Sei $z, x \in P$ und $c^T z > c^T x$.
Dann existiert für $\varepsilon > 0$ ein $y \in P$ mit: $||x - y|| \leqslant \varepsilon$ und $c^T y > c^T x$.

Beweis:

- P ist konvex, gilt $l(x, z) \in P$.
- Wähle $y \in l(x, z)$ mit $x \neq y$ und $||x - y|| \leqslant \varepsilon$.
- Nach Definition von l gibt $\lambda > 0$ mit: $y = \lambda x + (1 - \lambda)z$.
- Es folgt:

$$c^T y = c^T(\lambda x + (1 - \lambda)z)$$

Lokales und globales Optimum

P Polyhedron

Lemma

Sei $z, x \in P$ und $c^T z > c^T x$.
Dann existiert für $\varepsilon > 0$ ein $y \in P$ mit: $||x - y|| \leqslant \varepsilon$ und $c^T y > c^T x$.

Beweis:

- P ist konvex, gilt $l(x, z) \in P$.
- Wähle $y \in l(x, z)$ mit $x \neq y$ und $||x - y|| \leqslant \varepsilon$.
- Nach Definition von l gibt $\lambda > 0$ mit: $y = \lambda x + (1 - \lambda)z$.
- Es folgt:

$$\begin{aligned} c^T y &= c^T(\lambda x + (1 - \lambda)z) \\ &= \lambda c^T x + (1 - \lambda)c^T z \end{aligned}$$

Lokales und globales Optimum

Lemma

Sei $z, x \in P$ und $c^T z > c^T x$.
Dann existiert für $\varepsilon > 0$ ein $y \in P$ mit: $||x - y|| \leqslant \varepsilon$ und $c^T y > c^T x$.

Beweis:

- P ist konvex, gilt $l(x, z) \in P$.
- Wähle $y \in l(x, z)$ mit $x \neq y$ und $||x - y|| \leqslant \varepsilon$.
- Nach Definition von l gibt $\lambda > 0$ mit: $y = \lambda x + (1 - \lambda)z$.
- Es folgt:

$$\begin{aligned} c^T y &= c^T(\lambda x + (1-\lambda)z) \\ &= \lambda c^T x + (1-\lambda)c^T z \\ &> \lambda c^T x + (1-\lambda)c^T x \end{aligned}$$

Lokales und globales Optimum

Lemma

Sei $z, x \in P$ und $c^T z > c^T x$.
Dann existiert für $\varepsilon > 0$ ein $y \in P$ mit: $||x - y|| \leqslant \varepsilon$ und $c^T y > c^T x$.

Beweis:

- P ist konvex, gilt $l(x, z) \in P$.
- Wähle $y \in l(x, z)$ mit $x \neq y$ und $||x - y|| \leqslant \varepsilon$.
- Nach Definition von l gibt $\lambda > 0$ mit: $y = \lambda x + (1 - \lambda)z$.
- Es folgt:

$$\begin{aligned} c^T y &= c^T(\lambda x + (1-\lambda)z) \\ &= \lambda c^T x + (1-\lambda)c^T z \\ &> \lambda c^T x + (1-\lambda)c^T x \\ &= c^T x \end{aligned}$$

Lokales und globales Optimum

P **Polyhedron**

Lemma

Sei $z, x \in P$ und $c^T z > c^T x$.
Dann existiert für $\varepsilon > 0$ ein $y \in P$ mit: $||x - y|| \leqslant \varepsilon$ und $c^T y > c^T x$.

Beweis:

- P ist konvex, gilt $l(x, z) \in P$.
- Wähle $y \in l(x, z)$ mit $x \neq y$ und $||x - y|| \leqslant \varepsilon$.
- Nach Definition von l gibt $\lambda > 0$ mit: $y = \lambda x + (1 - \lambda)z$.
- Es folgt:

$$\begin{aligned} c^T y &= c^T(\lambda x + (1 - \lambda)z) \\ &= \lambda c^T x + (1 - \lambda)c^T z \\ &> \lambda c^T x + (1 - \lambda)c^T x \\ &= c^T x \end{aligned}$$

Lemma

Ein lokales Optimum ist auch ein globales Optimum.

Lokales und globales Optimum

Lemma

Sei $z, x \in P$ und $c^T z > c^T x$.
Dann existiert für $\varepsilon > 0$ ein $y \in P$ mit: $||x - y|| \leqslant \varepsilon$ und $c^T y > c^T x$.

Beweis:

- P ist konvex, gilt $l(x, z) \in P$.
- Wähle $y \in l(x, z)$ mit $x \neq y$ und $||x - y|| \leqslant \varepsilon$.
- Nach Definition von l gibt $\lambda > 0$ mit: $y = \lambda x + (1 - \lambda)z$.
- Es folgt:

$$\begin{aligned} c^T y &= c^T(\lambda x + (1-\lambda)z) \\ &= \lambda c^T x + (1-\lambda)c^T z \\ &> \lambda c^T x + (1-\lambda)c^T x \\ &= c^T x \end{aligned}$$

Lemma

Ein lokales Optimum ist auch ein globales Optimum.

Unterräume

P **Polyhedron**

- Eine Hyperebene wird beschrieben durch:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_d x_d = \beta.$$

Unterräume

P **Polyhedron**

- Eine Hyperebene wird beschrieben durch:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_d x_d = \beta.$$

  - Es sind $d - 1$ Variablen frei wählbar.

Unterräume

P **Polyhedron**

- Eine Hyperebene wird beschrieben durch:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_d x_d = \beta.$$

  - Es sind $d-1$ Variablen frei wählbar.
  - Der Wert der d-ten Variable ist dann festgelegt.

Unterräume

- Eine Hyperebene wird beschrieben durch:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_d x_d = \beta.$$

  - Es sind $d-1$ Variablen frei wählbar.
  - Der Wert der d-ten Variable ist dann festgelegt.
  - Der durch die Hyperebene beschriebene affine Unterraum ist ein Unterraum der Dimension $d-1$.

Unterräume

P **Polyhedron**

- Eine Hyperebene wird beschrieben durch:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_d x_d = \beta.$$

  - Es sind $d-1$ Variablen frei wählbar.
  - Der Wert der d-ten Variable ist dann festgelegt.
  - Der durch die Hyperebene beschriebene affine Unterraum ist ein Unterraum der Dimension $d-1$.
  - Ein Unterraum, der als Schnittmenge von k linear unabhängigen Hyperräumen beschrieben wird, hat Dimension $d-k$.

Unterräume

- Eine Hyperebene wird beschrieben durch:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_d x_d = \beta.$$

  - Es sind $d-1$ Variablen frei wählbar.
  - Der Wert der d-ten Variable ist dann festgelegt.
  - Der durch die Hyperebene beschriebene affine Unterraum ist ein Unterraum der Dimension $d-1$.
  - Ein Unterraum, der als Schnittmenge von k linear unabhängigen Hyperräumen beschrieben wird, hat Dimension $d-k$.
- Falls mehr als d Nebenbedingungen (Hyperebenen) sich in einem Punkt treffen, so ist das LP degeneriert.

Unterräume

- Eine Hyperebene wird beschrieben durch:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_d x_d = \beta.$$

  - Es sind $d-1$ Variablen frei wählbar.
  - Der Wert der d-ten Variable ist dann festgelegt.
  - Der durch die Hyperebene beschriebene affine Unterraum ist ein Unterraum der Dimension $d-1$.
  - Ein Unterraum, der als Schnittmenge von k linear unabhängigen Hyperräumen beschrieben wird, hat Dimension $d-k$.
- Falls mehr als d Nebenbedingungen (Hyperebenen) sich in einem Punkt treffen, so ist das LP degeneriert.
- Ein degeneriertes LP kann in ein nicht-degeneriertes LP umgeformt werden, ohne die Form (Zusammensetzung) der Lösung signifikant zu verändern.

Unterräume

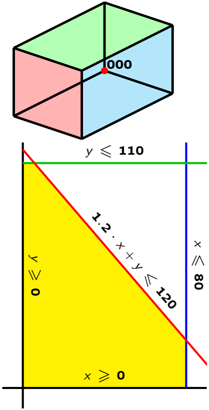
- Eine Hyperebene wird beschrieben durch:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_d x_d = \beta.$$

  - Es sind $d-1$ Variablen frei wählbar.
  - Der Wert der d-ten Variable ist dann festgelegt.
  - Der durch die Hyperebene beschriebene affine Unterraum ist ein Unterraum der Dimension $d-1$.
  - Ein Unterraum, der als Schnittmenge von k linear unabhängigen Hyperräumen beschrieben wird, hat Dimension $d-k$.
- Falls mehr als d Nebenbedingungen (Hyperebenen) sich in einem Punkt treffen, so ist das LP degeneriert.
- Ein degeneriertes LP kann in ein nicht-degeneriertes LP umgeformt werden, ohne die Form (Zusammensetzung) der Lösung signifikant zu verändern.

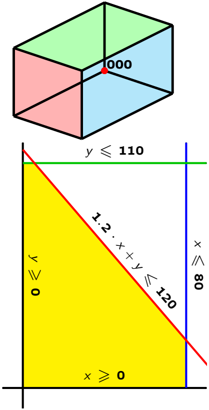
Oberfläche eines Polyhedrons

P **Polyhedron**



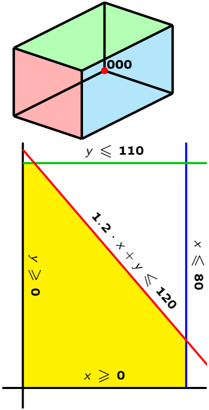
Oberfläche eines Polyhedrons

P **Polyhedron**



- Die Oberfläche eines Polyhedrons besteht aus Facetten.

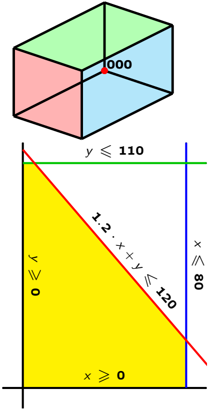
Oberfläche eines Polyhedrons



- Die Oberfläche eines Polyhedrons besteht aus Facetten.
  - Sei P ein Polyhedron und H eine Hyperebene und sei P komplett auf einer Seite der Hyperebene H.

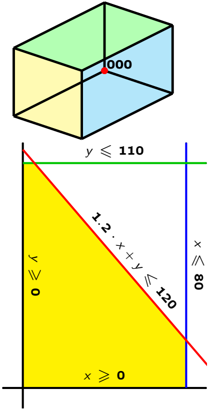
Oberfläche eines Polyhedrons

P **Polyhedron**



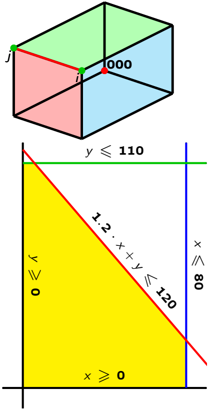
- Die Oberfläche eines Polyhedrons besteht aus Facetten.
  - Sei P ein Polyhedron und H eine Hyperebene und sei P komplett auf einer Seite der Hyperebene H.
  - Falls $f = P \cap H$ nicht leer ist, so

Oberfläche eines Polyhedrons



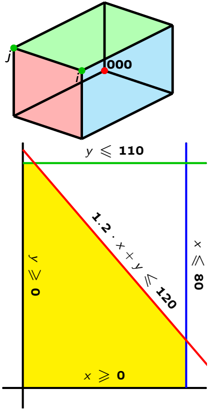
- Die Oberfläche eines Polyhedrons besteht aus Facetten.
  - Sei P ein Polyhedron und H eine Hyperebene und sei P komplett auf einer Seite der Hyperebene H.
  - Falls $f = P \cap H$ nicht leer ist, so
  - ist f eine Facette von P.

Oberfläche eines Polyhedrons



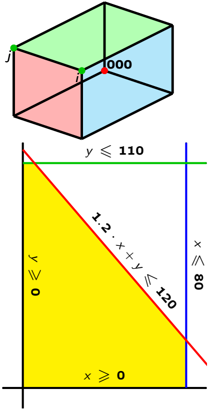
- Die Oberfläche eines Polyhedrons besteht aus Facetten.
  - Sei P ein Polyhedron und H eine Hyperebene und sei P komplett auf einer Seite der Hyperebene H.
  - Falls $f = P \cap H$ nicht leer ist, so
  - ist f eine Facette von P.
- Eine Facette der Dimension $d - 1$ heißt Face.

Oberfläche eines Polyhedrons



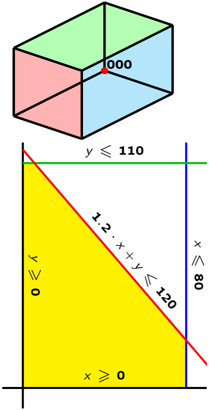
- Die Oberfläche eines Polyhedrons besteht aus Facetten.
  - Sei P ein Polyhedron und H eine Hyperebene und sei P komplett auf einer Seite der Hyperebene H.
  - Falls $f = P \cap H$ nicht leer ist, so
  - ist f eine Facette von P.
- Eine Facette der Dimension $d-1$ heißt Face.
- Eine Kante entspricht dem Schnitt von $d-1$ Hyperebenen (Facette der Dimension 1).

Oberfläche eines Polyhedrons



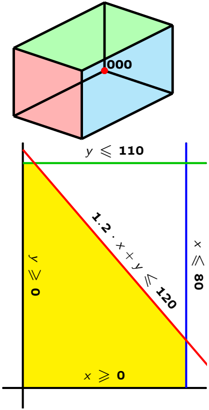
- Die Oberfläche eines Polyhedrons besteht aus Facetten.
  - Sei P ein Polyhedron und H eine Hyperebene und sei P komplett auf einer Seite der Hyperebene H.
  - Falls $f = P \cap H$ nicht leer ist, so
  - ist f eine Facette von P.
- Eine Facette der Dimension $d - 1$ heißt Face.
- Eine Kante entspricht dem Schnitt von $d - 1$ Hyperebenen (Facette der Dimension 1).
- Ein Knoten entspricht dem Schnitt von d Hyperebenen (Facette der Dimension 0).

Oberfläche eines Polyhedrons



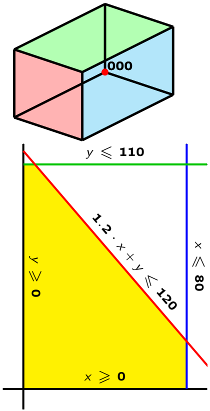
- Die Oberfläche eines Polyhedrons besteht aus Facetten.
    - Sei P ein Polyhedron und H eine Hyperebene und sei P komplett auf einer Seite der Hyperebene H.
    - Falls $f = P \cap H$ nicht leer ist, so
    - ist f eine Facette von P.
- Eine Facette der Dimension $d - 1$ heißt Face.
- Eine Kante entspricht dem Schnitt von $d - 1$ Hyperebenen (Facette der Dimension 1).
- Ein Knoten entspricht dem Schnitt von d Hyperebenen (Facette der Dimension 0).
- Zwei Knoten sind benachbart, wenn sie durch eine Kante verbunden sind.

Oberfläche eines Polyhedrons



- Die Oberfläche eines Polyhedrons besteht aus Facetten.
  - Sei P ein Polyhedron und H eine Hyperebene und sei P komplett auf einer Seite der Hyperebene H.
  - Falls $f = P \cap H$ nicht leer ist, so
  - ist f eine Facette von P.
- Eine Facette der Dimension $d - 1$ heißt Face.
- Eine Kante entspricht dem Schnitt von $d - 1$ Hyperebenen (Facette der Dimension 1).
- Ein Knoten entspricht dem Schnitt von d Hyperebenen (Facette der Dimension 0).
- Zwei Knoten sind benachbart, wenn sie durch eine Kante verbunden sind.
- Falls P unbeschränkt ist, so kann es unbeschränkte Kanten geben.

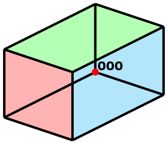
Oberfläche eines Polyhedrons

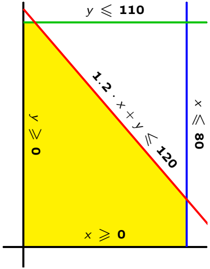


- Die Oberfläche eines Polyhedrons besteht aus Facetten.
  - Sei P ein Polyhedron und H eine Hyperebene und sei P komplett auf einer Seite der Hyperebene H.
  - Falls $f = P \cap H$ nicht leer ist, so
  - ist f eine Facette von P.
- Eine Facette der Dimension $d - 1$ heißt Face.
- Eine Kante entspricht dem Schnitt von $d - 1$ Hyperebenen (Facette der Dimension 1).
- Ein Knoten entspricht dem Schnitt von d Hyperebenen (Facette der Dimension 0).
- Zwei Knoten sind benachbart, wenn sie durch eine Kante verbunden sind.
- Falls P unbeschränkt ist, so kann es unbeschränkte Kanten geben.
- Solche Kanten haben nur einen oder keinen Endpunkt.

Oberfläche eines Polyhedrons

P **Polyhedron**





- Die Oberfläche eines Polyhedrons besteht aus Facetten.
  - Sei P ein Polyhedron und H eine Hyperebene und sei P komplett auf einer Seite der Hyperebene H.
  - Falls $f = P \cap H$ nicht leer ist, so
  - ist f eine Facette von P.
- Eine Facette der Dimension $d-1$ heißt Face.
- Eine Kante entspricht dem Schnitt von $d-1$ Hyperebenen (Facette der Dimension 1).
- Ein Knoten entspricht dem Schnitt von d Hyperebenen (Facette der Dimension 0).
- Zwei Knoten sind benachbart, wenn sie durch eine Kante verbunden sind.
- Falls P unbeschränkt ist, so kann es unbeschränkte Kanten geben.
- Solche Kanten haben nur einen oder keinen Endpunkt.

Zielfunktion

- Die Zielfunktion $c^T x$ (Vektor) gibt eine Richtung in $\mathbb{R}^d$ vor.

Zielfunktion

- Die Zielfunktion $c^T x$ (Vektor) gibt eine Richtung in $\mathbb{R}^d$ vor.
- Falls die Nebenbedingungen den Zielwert nach oben beschränken, so wird das LP als beschränkt bezeichnet.

Zielfunktion

- Die Zielfunktion $c^T x$ (Vektor) gibt eine Richtung in $\mathbb{R}^d$ vor.
- Falls die Nebenbedingungen den Zielwert nach oben beschränken, so wird das LP als beschränkt bezeichnet.
  - Falls der Zielwert nicht beschränkt ist, so heißt das LP unbeschränkt.

Zielfunktion

- Die Zielfunktion $c^T x$ (Vektor) gibt eine Richtung in $\mathbb{R}^d$ vor.
- Falls die Nebenbedingungen den Zielwert nach oben beschränken, so wird das LP als beschränkt bezeichnet.
  - Falls der Zielwert nicht beschränkt ist, so heißt das LP unbeschränkt.
- Das Polyhedron muss dabei nur in der Richtung von $c^T x$ beschränkt sein.

Zielfunktion

- Die Zielfunktion $c^T x$ (Vektor) gibt eine Richtung in $\mathbb{R}^d$ vor.
- Falls die Nebenbedingungen den Zielwert nach oben beschränken, so wird das LP als beschränkt bezeichnet.
  - Falls der Zielwert nicht beschränkt ist, so heißt das LP unbeschränkt.
- Das Polyhedron muss dabei nur in der Richtung von $c^T x$ beschränkt sein.
- Ist das Polyhedron in alle Richtungen beschränkt (in einer Kugel enthalten), so wird es als Polytop bezeichnet.

Zielfunktion

- Die Zielfunktion $c^T x$ (Vektor) gibt eine Richtung in $\mathbb{R}^d$ vor.
- Falls die Nebenbedingungen den Zielwert nach oben beschränken, so wird das LP als beschränkt bezeichnet.
  - Falls der Zielwert nicht beschränkt ist, so heißt das LP unbeschränkt.
- Das Polyhedron muss dabei nur in der Richtung von $c^T x$ beschränkt sein.
- Ist das Polyhedron in alle Richtungen beschränkt (in einer Kugel enthalten), so wird es als Polytop bezeichnet.

Geometrische Bestimmung des Optimums

- Betrachte beschränktes LP in kanonischer Form mit Lösungspolyhedron P und Zielfunktion $c^T x$,

Geometrische Bestimmung des Optimums

- Betrachte beschränktes LP in kanonischer Form mit Lösungspolyhedron P und Zielfunktion $c^T x$,
- Sei $\mathcal{H}$ eine zum Vektor c orthogonale Hyperebene.

Geometrische Bestimmung des Optimums

- Betrachte beschränktes LP in kanonischer Form mit Lösungspolyhedron P und Zielfunktion $c^T x$,
- Sei $\mathcal{H}$ eine zum Vektor c orthogonale Hyperebene.
- Damit gibt es $t \in \mathbb{R}$ mit: $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$.

Geometrische Bestimmung des Optimums

- Betrachte beschränktes LP in kanonischer Form mit Lösungspolyhedron P und Zielfunktion $c^T x$,
- Sei $\mathcal{H}$ eine zum Vektor c orthogonale Hyperebene.
- Damit gibt es $t \in \mathbb{R}$ mit: $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$.
- Setze $\mathcal{H}_t = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$.

Geometrische Bestimmung des Optimums

- Betrachte beschränktes LP in kanonischer Form mit Lösungspolyhedron P und Zielfunktion $c^T x$,
- Sei $\mathcal{H}$ eine zum Vektor c orthogonale Hyperebene.
- Damit gibt es $t \in \mathbb{R}$ mit: $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$.
- Setze $\mathcal{H}_t = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$.
- Sei $\mathcal{H}$ so gewählt, dass $P \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ gilt.

Geometrische Bestimmung des Optimums

- Betrachte beschränktes LP in kanonischer Form mit Lösungspolyhedron P und Zielfunktion $c^T x$,
- Sei $\mathcal{H}$ eine zum Vektor c orthogonale Hyperebene.
- Damit gibt es $t \in \mathbb{R}$ mit: $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$.
- Setze $\mathcal{H}_t = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$.
- Sei $\mathcal{H}$ so gewählt, dass $P \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ gilt.
- Wähle z maximal mit $P \cap \mathcal{H}_z \neq \emptyset$.

Geometrische Bestimmung des Optimums

- Betrachte beschränktes LP in kanonischer Form mit Lösungspolyhedron P und Zielfunktion $c^T x$,
- Sei $\mathcal{H}$ eine zum Vektor c orthogonale Hyperebene.
- Damit gibt es $t \in \mathbb{R}$ mit: $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$.
- Setze $\mathcal{H}_t = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$.
- Sei $\mathcal{H}$ so gewählt, dass $P \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ gilt.
- Wähle z maximal mit $P \cap \mathcal{H}_z \neq \emptyset$.
- Ein beliebiger Punkt $x^* \in P \cap \mathcal{H}_z$ ist eine optimale Lösung des LPs.

Geometrische Bestimmung des Optimums

- Betrachte beschränktes LP in kanonischer Form mit Lösungspolyhedron P und Zielfunktion $c^T x$,
- Sei $\mathcal{H}$ eine zum Vektor c orthogonale Hyperebene.
- Damit gibt es $t \in \mathbb{R}$ mit: $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$.
- Setze $\mathcal{H}_t = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$.
- Sei $\mathcal{H}$ so gewählt, dass $P \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ gilt.
- Wähle z maximal mit $P \cap \mathcal{H}_z \neq \emptyset$.
- Ein beliebiger Punkt $x^* \in P \cap \mathcal{H}_z$ ist eine optimale Lösung des LPs.
- Beobachtungen:

Geometrische Bestimmung des Optimums

- Betrachte beschränktes LP in kanonischer Form mit Lösungspolyhedron P und Zielfunktion $c^T x$,
- Sei $\mathcal{H}$ eine zum Vektor c orthogonale Hyperebene.
- Damit gibt es $t \in \mathbb{R}$ mit: $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$.
- Setze $\mathcal{H}_t = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$.
- Sei $\mathcal{H}$ so gewählt, dass $P \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ gilt.
- Wähle z maximal mit $P \cap \mathcal{H}_z \neq \emptyset$.
- Ein beliebiger Punkt $x^* \in P \cap \mathcal{H}_z$ ist eine optimale Lösung des LPs.
- Beobachtungen:
  - $P \cap \mathcal{H}_z$ ist eine Facette f von P.

Geometrische Bestimmung des Optimums

- Betrachte beschränktes LP in kanonischer Form mit Lösungspolyhedron P und Zielfunktion $c^T x$,
- Sei $\mathcal{H}$ eine zum Vektor c orthogonale Hyperebene.
- Damit gibt es $t \in \mathbb{R}$ mit: $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$.
- Setze $\mathcal{H}_t = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$.
- Sei $\mathcal{H}$ so gewählt, dass $P \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ gilt.
- Wähle z maximal mit $P \cap \mathcal{H}_z \neq \emptyset$.
- Ein beliebiger Punkt $x^* \in P \cap \mathcal{H}_z$ ist eine optimale Lösung des LPs.
- Beobachtungen:
  - $P \cap \mathcal{H}_z$ ist eine Facette f von P.
  - Falls f nicht in allen Richtungen unbeschränkt ist, so gibt es mindestens einen optimalen Knoten.

Geometrische Bestimmung des Optimums

- Betrachte beschränktes LP in kanonischer Form mit Lösungspolyhedron P und Zielfunktion $c^T x$,
- Sei $\mathcal{H}$ eine zum Vektor c orthogonale Hyperebene.
- Damit gibt es $t \in \mathbb{R}$ mit: $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$.
- Setze $\mathcal{H}_t = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$.
- Sei $\mathcal{H}$ so gewählt, dass $P \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ gilt.
- Wähle z maximal mit $P \cap \mathcal{H}_z \neq \emptyset$.
- Ein beliebiger Punkt $x^* \in P \cap \mathcal{H}_z$ ist eine optimale Lösung des LPs.
- Beobachtungen:
  - $P \cap \mathcal{H}_z$ ist eine Facette f von P.
  - Falls f nicht in allen Richtungen unbeschränkt ist, so gibt es mindestens einen optimalen Knoten.

Algebraische Gleichungsform

- Gegeben sei ein Ungleichungssystem in kanonischer Form:

$$\text{Maximiere } {c'}^T x \text{ unter } A'x' \geqslant b' \text{ und } x' \geqslant 0.$$

Algebraische Gleichungsform

- Gegeben sei ein Ungleichungssystem in kanonischer Form:

$$\text{Maximiere } {c'}^T x \text{ unter } A'x' \geqslant b' \text{ und } x' \geqslant 0.$$

- Dies kann unter Einführung von Schlupfvariablen in die folgende Form gebracht werden:

$$\text{Maximiere } c^T x \text{ unter } Ax = b \text{ und } x \geqslant 0.$$

Algebraische Gleichungsform

- Gegeben sei ein Ungleichungssystem in kanonischer Form:

$$\text{Maximiere } {c'}^T x \text{ unter } A'x' \geqslant b' \text{ und } x' \geqslant 0.$$

- Dies kann unter Einführung von Schlupfvariablen in die folgende Form gebracht werden:

$$\text{Maximiere } c^T x \text{ unter } Ax = b \text{ und } x \geqslant 0.$$

- Dazu wird eine Ungleichung

$$a_i x \geqslant b_i \text{ mit } x \geqslant 0$$

Algebraische Gleichungsform

- Gegeben sei ein Ungleichungssystem in kanonischer Form:

$$\text{Maximiere } {c'}^T x \text{ unter } A'x' \geqslant b' \text{ und } x' \geqslant 0.$$

- Dies kann unter Einführung von Schlupfvariablen in die folgende Form gebracht werden:

$$\text{Maximiere } c^T x \text{ unter } Ax = b \text{ und } x \geqslant 0.$$

- Dazu wird eine Ungleichung

$$a_i x \geqslant b_i \text{ mit } x \geqslant 0$$

- mit Hilfe der Schlupfvariablen s_i umgeformt zu:

$$a_i x - s_i = b_i \text{ mit } x \geqslant 0 \text{ und } s_i \geqslant 0.$$

Algebraische Gleichungsform

- Gegeben sei ein Ungleichungssystem in kanonischer Form:

$$\text{Maximiere } {c'}^T x \text{ unter } A'x' \geqslant b' \text{ und } x' \geqslant 0.$$

- Dies kann unter Einführung von Schlupfvariablen in die folgende Form gebracht werden:

$$\text{Maximiere } c^T x \text{ unter } Ax = b \text{ und } x \geqslant 0.$$

- Dazu wird eine Ungleichung

$$a_i x \geqslant b_i \text{ mit } x \geqslant 0$$

- mit Hilfe der Schlupfvariablen s_i umgeformt zu:

$$a_i x - s_i = b_i \text{ mit } x \geqslant 0 \text{ und } s_i \geqslant 0.$$

- Falls das kanonische Ungleichungssystem d Variablen und m Ungleichungen hat,

Algebraische Gleichungsform

- Gegeben sei ein Ungleichungssystem in kanonischer Form:

$$\text{Maximiere } {c'}^T x \text{ unter } A'x' \geqslant b' \text{ und } x' \geqslant 0.$$

- Dies kann unter Einführung von Schlupfvariablen in die folgende Form gebracht werden:

$$\text{Maximiere } c^T x \text{ unter } Ax = b \text{ und } x \geqslant 0.$$

- Dazu wird eine Ungleichung

$$a_i x \geqslant b_i \text{ mit } x \geqslant 0$$

- mit Hilfe der Schlupfvariablen s_i umgeformt zu:

$$a_i x - s_i = b_i \text{ mit } x \geqslant 0 \text{ und } s_i \geqslant 0.$$

- Falls das kanonische Ungleichungssystem d Variablen und m Ungleichungen hat,
- so hat das algebraische Gleichungsform $n = d + m$ Variablen und es gilt $\text{rang}(A) = m$.

Algebraische Gleichungsform

- Gegeben sei ein Ungleichungssystem in kanonischer Form:

$$\text{Maximiere } {c'}^T x \text{ unter } A'x' \geqslant b' \text{ und } x' \geqslant 0.$$

- Dies kann unter Einführung von Schlupfvariablen in die folgende Form gebracht werden:

$$\text{Maximiere } c^T x \text{ unter } Ax = b \text{ und } x \geqslant 0.$$

- Dazu wird eine Ungleichung

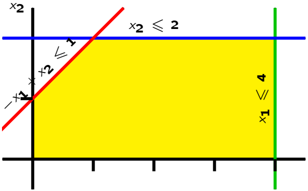
$$a_i x \geqslant b_i \text{ mit } x \geqslant 0$$

- mit Hilfe der Schlupfvariablen s_i umgeformt zu:

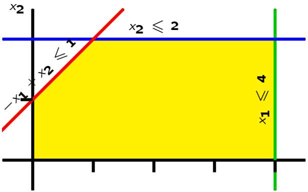
$$a_i x - s_i = b_i \text{ mit } x \geqslant 0 \text{ und } s_i \geqslant 0.$$

- Falls das kanonische Ungleichungssystem d Variablen und m Ungleichungen hat,
- so hat das algebraische Gleichungsform $n = d + m$ Variablen und es gilt $\text{rang}(A) = m$.

Beispiel



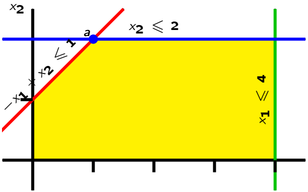
Beispiel



- Sei ein kanonisches Ungleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned} x_1 &\leqslant 4 & x_1 &\geqslant 0 \\ x_2 &\leqslant 2 & x_2 &\geqslant 0 \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 1 \end{aligned}$$

Beispiel



- Punkt $(1,2)$ wird zum Punkt $(1,2,3,0,0)$.

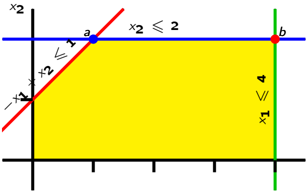
- Sei ein kanonisches Ungleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned} x_1 &\leqslant 4 & x_1 &\geqslant 0\\ x_2 &\leqslant 2 & x_2 &\geqslant 0\\ -x_1+x_2 &\leqslant 1 \end{aligned}$$

- In der algebraischen Gleichungsform erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_1+x_3 &= 4 & x_1 &\geqslant 0 & x_3 &\geqslant 0\\ x_2+x_4 &= 2 & x_2 &\geqslant 0 & x_4 &\geqslant 0\\ -x_1+x_2+x_5 &= 1 & & & x_5 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Beispiel



- Punkt $(1,2)$ wird zum Punkt $(1,2,3,0,0)$.
- Punkt $(4,2)$ wird zum Punkt $(4,2,0,0,3)$.

- Sei ein kanonisches Ungleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned} x_1 &\leqslant 4 & x_1 &\geqslant 0 \\ x_2 &\leqslant 2 & x_2 &\geqslant 0 \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 1 \end{aligned}$$

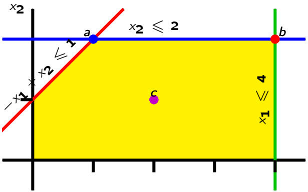
- In der algebraischen Gleichungsform erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 & x_1 &\geqslant 0 & x_3 &\geqslant 0 \\ x_2 + x_4 &= 2 & x_2 &\geqslant 0 & x_4 &\geqslant 0 \\ -x_1 + x_2 + x_5 &= 1 & & & x_5 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

- Aufgelöst nach den Schlupfvariablen:

$$\begin{aligned} x_3 &= 4 - x_1 \\ x_4 &= 2 - x_2 \\ x_5 &= 1 + x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Beispiel



- Punkt $(1,2)$ wird zum Punkt $(1,2,3,0,0)$.
- Punkt $(4,2)$ wird zum Punkt $(4,2,0,0,3)$.
- Punkt $(2,1)$ wird zum Punkt $(2,1,2,1,2)$.

- Sei ein kanonisches Ungleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned} x_1 &\leqslant 4 & x_1 &\geqslant 0 \\ x_2 &\leqslant 2 & x_2 &\geqslant 0 \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 1 \end{aligned}$$

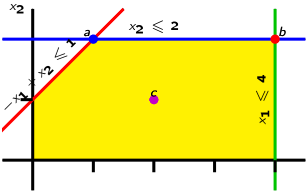
- In der algebraischen Gleichungsform erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 & x_1 &\geqslant 0 & x_3 &\geqslant 0 \\ x_2 + x_4 &= 2 & x_2 &\geqslant 0 & x_4 &\geqslant 0 \\ -x_1 + x_2 + x_5 &= 1 & & & x_5 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

- Aufgelöst nach den Schlupfvariablen:

$$\begin{aligned} x_3 &= 4 - x_1 \\ x_4 &= 2 - x_2 \\ x_5 &= 1 + x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Beispiel



- Punkt $(1, 2)$ wird zum Punkt $(1, 2, 3, 0, 0)$.
- Punkt $(4, 2)$ wird zum Punkt $(4, 2, 0, 0, 3)$.
- Punkt $(2, 1)$ wird zum Punkt $(2, 1, 2, 1, 2)$.
- Durch Einsetzen in die letzten Gleichungen.

- Sei ein kanonisches Ungleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned} x_1 &\leqslant 4 & x_1 &\geqslant 0 \\ x_2 &\leqslant 2 & x_2 &\geqslant 0 \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 1 \end{aligned}$$

- In der algebraischen Gleichungsform erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 & x_1 &\geqslant 0 & x_3 &\geqslant 0 \\ x_2 + x_4 &= 2 & x_2 &\geqslant 0 & x_4 &\geqslant 0 \\ -x_1 + x_2 + x_5 &= 1 & & & x_5 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

- Aufgelöst nach den Schlupfvariablen:

$$\begin{aligned} x_3 &= 4 - x_1 \\ x_4 &= 2 - x_2 \\ x_5 &= 1 + x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Basislösungen

- Gegeben sei ein LP in Gleichungsform.

Basislösungen

- Gegeben sei ein LP in Gleichungsform.
- Sei $\delta : \{1, 2, \ldots, k\} \mapsto \{1, 2, \ldots, n\}$ eine geordnete Auswahl von k Spalten, d.h.
$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, k-1\} : \delta(i) < \delta(i+1).$$

Basislösungen

- Gegeben sei ein LP in Gleichungsform.
- Sei $\delta : \{1, 2, \ldots, k\} \mapsto \{1, 2, \ldots, n\}$ eine geordnete Auswahl von k Spalten, d.h.
$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, k-1\} : \delta(i) < \delta(i+1).$$
- Sei A_δ die Matrix, die nur die Spalten aus δ enthält:
$$A_\delta = A_{\delta(1)}, A_{\delta(2)}, A_{\delta(3)}, \ldots, A_{\delta(k)}.$$

Basislösungen

- Gegeben sei ein LP in Gleichungsform.
- Sei $\delta : \{1, 2, \ldots, k\} \mapsto \{1, 2, \ldots, n\}$ eine geordnete Auswahl von k Spalten, d.h.
$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, k-1\} : \delta(i) < \delta(i+1).$$
- Sei A_δ die Matrix, die nur die Spalten aus δ enthält:
$$A_\delta = A_{\delta(1)}, A_{\delta(2)}, A_{\delta(3)}, \ldots, A_{\delta(k)}.$$
- Sei weiter:
$$x_\delta = x_{\delta(1)}, x_{\delta(2)}, x_{\delta(3)}, \ldots, x_{\delta(k)}$$
$$b_\delta = b_{\delta(1)}, b_{\delta(2)}, b_{\delta(3)}, \ldots, b_{\delta(k)}$$

Basislösungen

- Gegeben sei ein LP in Gleichungsform.
- Sei $\delta : \{1, 2, \ldots, k\} \mapsto \{1, 2, \ldots, n\}$ eine geordnete Auswahl von k Spalten, d.h.
$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, k-1\} : \delta(i) < \delta(i+1).$$
- Sei A_δ die Matrix, die nur die Spalten aus δ enthält:
$$A_\delta = A_{\delta(1)}, A_{\delta(2)}, A_{\delta(3)}, \ldots, A_{\delta(k)}.$$
- Sei weiter:
$$\begin{aligned} x_\delta &= x_{\delta(1)}, x_{\delta(2)}, x_{\delta(3)}, \ldots, x_{\delta(k)} \\ b_\delta &= b_{\delta(1)}, b_{\delta(2)}, b_{\delta(3)}, \ldots, b_{\delta(k)} \end{aligned}$$
- Falls $k = d$, so wird δ als Basis bezeichnet. Dann ist A_δ invertierbar.

Basislösungen

- Gegeben sei ein LP in Gleichungsform.
- Sei $\delta : \{1, 2, \dots, k\} \mapsto \{1, 2, \dots, n\}$ eine geordnete Auswahl von k Spalten, d.h.
$$\forall i \in \{1, 2, \dots, k-1\} : \delta(i) < \delta(i+1).$$
- Sei A_δ die Matrix, die nur die Spalten aus δ enthält:
$$A_\delta = A_{\delta(1)}, A_{\delta(2)}, A_{\delta(3)}, \dots, A_{\delta(k)}.$$
- Sei weiter:
$$x_\delta = x_{\delta(1)}, x_{\delta(2)}, x_{\delta(3)}, \dots, x_{\delta(k)}$$
$$b_\delta = b_{\delta(1)}, b_{\delta(2)}, b_{\delta(3)}, \dots, b_{\delta(k)}$$
- Falls $k = d$, so wird δ als Basis bezeichnet. Dann ist A_δ invertierbar.
- Sei $\bar{\delta}$ die geordnete Auswahl der verbleibenden Spalten.

Basislösungen

- Gegeben sei ein LP in Gleichungsform.
- Sei $\delta : \{1, 2, \dots, k\} \mapsto \{1, 2, \dots, n\}$ eine geordnete Auswahl von k Spalten, d.h.
$$\forall i \in \{1, 2, \dots, k-1\} : \delta(i) < \delta(i+1).$$
- Sei A_δ die Matrix, die nur die Spalten aus δ enthält:
$$A_\delta = A_{\delta(1)}, A_{\delta(2)}, A_{\delta(3)}, \dots, A_{\delta(k)}.$$
- Sei weiter:
$$\begin{aligned} x_\delta &= x_{\delta(1)}, x_{\delta(2)}, x_{\delta(3)}, \dots, x_{\delta(k)} \\ b_\delta &= b_{\delta(1)}, b_{\delta(2)}, b_{\delta(3)}, \dots, b_{\delta(k)} \end{aligned}$$
- Falls $k = d$, so wird δ als Basis bezeichnet. Dann ist A_δ invertierbar.
- Sei $\bar{\delta}$ die geordnete Auswahl der verbleibenden Spalten.
- Dann hat das Gleichungssystem die Gestalt: $A_\delta x_\delta + A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} = b$.

Basislösungen

- Gegeben sei ein LP in Gleichungsform.
- Sei $\delta : \{1, 2, \dots, k\} \mapsto \{1, 2, \dots, n\}$ eine geordnete Auswahl von k Spalten, d.h.
$$\forall i \in \{1, 2, \dots, k-1\} : \delta(i) < \delta(i+1).$$
- Sei A_δ die Matrix, die nur die Spalten aus δ enthält:
$$A_\delta = A_{\delta(1)}, A_{\delta(2)}, A_{\delta(3)}, \dots, A_{\delta(k)}.$$
- Sei weiter:
$$\begin{aligned} x_\delta &= x_{\delta(1)}, x_{\delta(2)}, x_{\delta(3)}, \dots, x_{\delta(k)} \\ b_\delta &= b_{\delta(1)}, b_{\delta(2)}, b_{\delta(3)}, \dots, b_{\delta(k)} \end{aligned}$$
- Falls $k = d$, so wird δ als Basis bezeichnet. Dann ist A_δ invertierbar.
- Sei $\bar{\delta}$ die geordnete Auswahl der verbleibenden Spalten.
- Dann hat das Gleichungssystem die Gestalt: $A_\delta x_\delta + A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} = b$.
- Mit $x_{\bar{\delta}} = 0$ hat das Gleichungssystem die eindeutige Lösung
$$x_\delta = A_\delta^{-1} b.$$

Basislösungen

- Gegeben sei ein LP in Gleichungsform.
- Sei $\delta : \{1,2,\ldots,k\} \mapsto \{1,2,\ldots,n\}$ eine geordnete Auswahl von k Spalten, d.h.
$$\forall i \in \{1,2,\ldots,k-1\} : \delta(i) < \delta(i+1).$$
- Sei A_δ die Matrix, die nur die Spalten aus δ enthält:
$$A_\delta = A_{\delta(1)}, A_{\delta(2)}, A_{\delta(3)}, \ldots, A_{\delta(k)}.$$
- Sei weiter:
$$\begin{aligned} x_\delta &= x_{\delta(1)}, x_{\delta(2)}, x_{\delta(3)}, \ldots, x_{\delta(k)} \\ b_\delta &= b_{\delta(1)}, b_{\delta(2)}, b_{\delta(3)}, \ldots, b_{\delta(k)} \end{aligned}$$
- Falls $k = d$, so wird δ als Basis bezeichnet. Dann ist A_δ invertierbar.
- Sei $\bar{\delta}$ die geordnete Auswahl der verbleibenden Spalten.
- Dann hat das Gleichungssystem die Gestalt: $A_\delta x_\delta + A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} = b$.
- Mit $x_{\bar{\delta}} = 0$ hat das Gleichungssystem die eindeutige Lösung
$$x_\delta = A_\delta^{-1} b.$$
- Die Lösung $(A_\delta^{-1} b, 0)$ wird als Basislösung zur Basis δ bezeichnet.

Basislösungen

- Gegeben sei ein LP in Gleichungsform.
- Sei $\delta : \{1, 2, \ldots, k\} \mapsto \{1, 2, \ldots, n\}$ eine geordnete Auswahl von k Spalten, d.h.
$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, k-1\} : \delta(i) < \delta(i+1).$$
- Sei A_δ die Matrix, die nur die Spalten aus δ enthält:
$$A_\delta = A_{\delta(1)}, A_{\delta(2)}, A_{\delta(3)}, \ldots, A_{\delta(k)}.$$
- Sei weiter:
$$\begin{aligned} x_\delta &= x_{\delta(1)}, x_{\delta(2)}, x_{\delta(3)}, \ldots, x_{\delta(k)} \\ b_\delta &= b_{\delta(1)}, b_{\delta(2)}, b_{\delta(3)}, \ldots, b_{\delta(k)} \end{aligned}$$
- Falls $k = d$, so wird δ als Basis bezeichnet. Dann ist A_δ invertierbar.
- Sei $\bar{\delta}$ die geordnete Auswahl der verbleibenden Spalten.
- Dann hat das Gleichungssystem die Gestalt: $A_\delta x_\delta + A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} = b$.
- Mit $x_{\bar{\delta}} = 0$ hat das Gleichungssystem die eindeutige Lösung
$$x_\delta = A_\delta^{-1} b.$$
- Die Lösung $(A_\delta^{-1} b, 0)$ wird als Basislösung zur Basis δ bezeichnet.

Interpretation

- In der kanonischen Form entsprechen die Basislösungen den Schnittpunkten von d Hyperebenen der Nebenbedingungen.

Interpretation

- In der kanonischen Form entsprechen die Basislösungen den Schnittpunkten von d Hyperebenen der Nebenbedingungen.
- Betrachte dazu:

Interpretation

- In der kanonischen Form entsprechen die Basislösungen den Schnittpunkten von d Hyperebenen der Nebenbedingungen.
- Betrachte dazu:
  - In der Basislösung sind $n - m = d$ Variablen Null.

Interpretation

- In der kanonischen Form entsprechen die Basislösungen den Schnittpunkten von d Hyperebenen der Nebenbedingungen.
- Betrachte dazu:
  - In der Basislösung sind $n - m = d$ Variablen Null.
  - Das sind entweder Schlupfvariablen oder Variablen der kanonischen Form.

Interpretation

- In der kanonischen Form entsprechen die Basislösungen den Schnittpunkten von d Hyperebenen der Nebenbedingungen.
- Betrachte dazu:
  - In der Basislösung sind $n - m = d$ Variablen Null.
  - Das sind entweder Schlupfvariablen oder Variablen der kanonischen Form.
  - Zu jeder der Variablen haben wir eine Hyperebene in der kanonischen Form.

Interpretation

- In der kanonischen Form entsprechen die Basislösungen den Schnittpunkten von d Hyperebenen der Nebenbedingungen.
- Betrachte dazu:
  - In der Basislösung sind $n - m = d$ Variablen Null.
  - Das sind entweder Schlupfvariablen oder Variablen der kanonischen Form.
  - Zu jeder der Variablen haben wir eine Hyperebene in der kanonischen Form.
  - Eine Basislösung ist zulässig, falls die Variablen nicht negativ sind.

Interpretation

- In der kanonischen Form entsprechen die Basislösungen den Schnittpunkten von d Hyperebenen der Nebenbedingungen.
- Betrachte dazu:
  - In der Basislösung sind $n - m = d$ Variablen Null.
  - Das sind entweder Schlupfvariablen oder Variablen der kanonischen Form.
  - Zu jeder der Variablen haben wir eine Hyperebene in der kanonischen Form.
  - Eine Basislösung ist zulässig, falls die Variablen nicht negativ sind.
  - Dann entspricht die zulässige Basislösung einem Knoten des Lösungspolyhedrons.

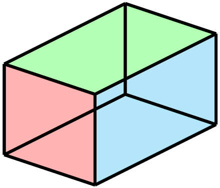
Interpretation

- In der kanonischen Form entsprechen die Basislösungen den Schnittpunkten von d Hyperebenen der Nebenbedingungen.
- Betrachte dazu:
  - In der Basislösung sind $n - m = d$ Variablen Null.
  - Das sind entweder Schlupfvariablen oder Variablen der kanonischen Form.
  - Zu jeder der Variablen haben wir eine Hyperebene in der kanonischen Form.
  - Eine Basislösung ist zulässig, falls die Variablen nicht negativ sind.
  - Dann entspricht die zulässige Basislösung einem Knoten des Lösungspolyhedrons.
  - Falls eine der Basisvariablen Null ist, so schneiden sich mehr als d Hyperebenen an einem Punkt und das LP ist degeneriert.

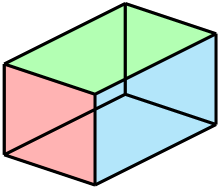
Interpretation

- In der kanonischen Form entsprechen die Basislösungen den Schnittpunkten von d Hyperebenen der Nebenbedingungen.
- Betrachte dazu:
  - In der Basislösung sind $n - m = d$ Variablen Null.
  - Das sind entweder Schlupfvariablen oder Variablen der kanonischen Form.
  - Zu jeder der Variablen haben wir eine Hyperebene in der kanonischen Form.
  - Eine Basislösung ist zulässig, falls die Variablen nicht negativ sind.
  - Dann entspricht die zulässige Basislösung einem Knoten des Lösungspolyhedrons.
  - Falls eine der Basisvariablen Null ist, so schneiden sich mehr als d Hyperebenen an einem Punkt und das LP ist degeneriert.

Einleitung

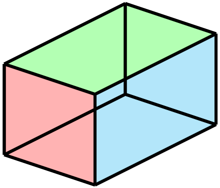


Einleitung



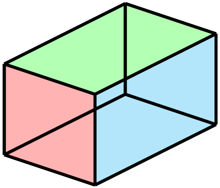
- Zwei Methoden, um in einem Polyhedron das Optimum bezüglich einer Zielfunktion zu finden:

Einleitung



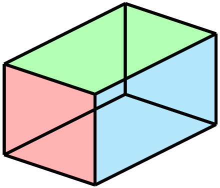
- Zwei Methoden, um in einem Polyhedron das Optimum bezüglich einer Zielfunktion zu finden:
- "Laufe" auf der Oberfläche über Knoten und Kanten "bergauf" in Richtung Optimum.

Einleitung



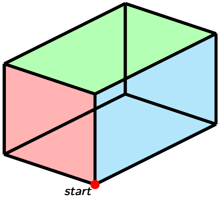
- Zwei Methoden, um in einem Polyhedron das Optimum bezüglich einer Zielfunktion zu finden:
- “Laufe” auf der Oberfläche über Knoten und Kanten “bergauf” in Richtung Optimum.
  - Starte an einem beliebigen Knoten.

Einleitung



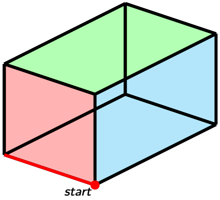
- Zwei Methoden, um in einem Polyhedron das Optimum bezüglich einer Zielfunktion zu finden:
- "Laufe" auf der Oberfläche über Knoten und Kanten "bergauf" in Richtung Optimum.
  - Starte an einem beliebigen Knoten.
  - Suche "verbessernde" Kante.

Einleitung



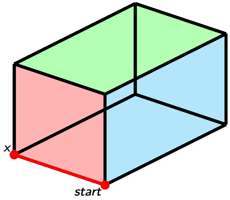
- Zwei Methoden, um in einem Polyhedron das Optimum bezüglich einer Zielfunktion zu finden:
- “Laufe” auf der Oberfläche über Knoten und Kanten “bergauf” in Richtung Optimum.
  - Starte an einem beliebigen Knoten.
  - Suche “verbessernde” Kante.
  - Gehe über diese Kante zu neuem Knoten.

Einleitung



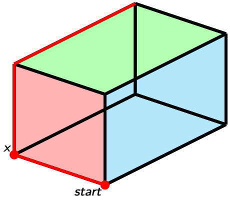
- Zwei Methoden, um in einem Polyhedron das Optimum bezüglich einer Zielfunktion zu finden:
- "Laufe" auf der Oberfläche über Knoten und Kanten "bergauf" in Richtung Optimum.
  - Starte an einem beliebigen Knoten.
  - Suche "verbessernde" Kante.
  - Gehe über diese Kante zu neuem Knoten.
  - Wiederhole bis das Optimum gefunden ist.

Einleitung



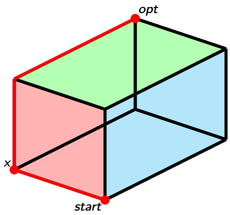
- Zwei Methoden, um in einem Polyhedron das Optimum bezüglich einer Zielfunktion zu finden:
- “Laufe” auf der Oberfläche über Knoten und Kanten “bergauf” in Richtung Optimum.
  - Starte an einem beliebigen Knoten.
  - Suche “verbessernde” Kante.
  - Gehe über diese Kante zu neuem Knoten.
  - Wiederhole bis das Optimum gefunden ist.
- Suche im Inneren des Polyhedrons einen Punkt und versuche das Optimum zu “sehen”.

Einleitung



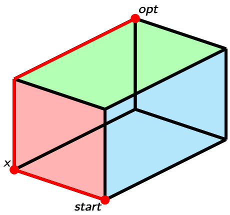
- Zwei Methoden, um in einem Polyhedron das Optimum bezüglich einer Zielfunktion zu finden:
- “Laufe” auf der Oberfläche über Knoten und Kanten “bergauf” in Richtung Optimum.
  - Starte an einem beliebigen Knoten.
  - Suche “verbessernde” Kante.
  - Gehe über diese Kante zu neuem Knoten.
  - Wiederhole bis das Optimum gefunden ist.
- Suche im Inneren des Polyhedrons einen Punkt und versuche das Optimum zu “sehen”.
  - Suche Punkt im Polyhedron.

Einleitung



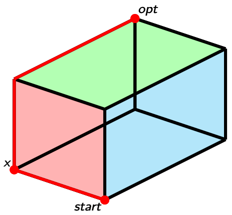
- Zwei Methoden, um in einem Polyhedron das Optimum bezüglich einer Zielfunktion zu finden:
- “Laufe” auf der Oberfläche über Knoten und Kanten “bergauf” in Richtung Optimum.
  - Starte an einem beliebigen Knoten.
  - Suche “verbessernde” Kante.
  - Gehe über diese Kante zu neuem Knoten.
  - Wiederhole bis das Optimum gefunden ist.
- Suche im Inneren des Polyhedrons einen Punkt und versuche das Optimum zu “sehen”.
  - Suche Punkt im Polyhedron.
  - Grenze Polyhedron mittels Hyperebene orthogonal zum Zielvektor ein.

Einleitung



- Zwei Methoden, um in einem Polyhedron das Optimum bezüglich einer Zielfunktion zu finden:
- “Laufe” auf der Oberfläche über Knoten und Kanten “bergauf” in Richtung Optimum.
  - Starte an einem beliebigen Knoten.
  - Suche “verbessernde” Kante.
  - Gehe über diese Kante zu neuem Knoten.
  - Wiederhole bis das Optimum gefunden ist.
- Suche im Inneren des Polyhedrons einen Punkt und versuche das Optimum zu “sehen”.
  - Suche Punkt im Polyhedron.
  - Grenze Polyhedron mittels Hyperebene orthogonal zum Zielvektor ein.
  - Führe Halbierungssuche durch.

Einleitung



- Zwei Methoden, um in einem Polyhedron das Optimum bezüglich einer Zielfunktion zu finden:
- “Laufe” auf der Oberfläche über Knoten und Kanten “bergauf” in Richtung Optimum.
  - Starte an einem beliebigen Knoten.
  - Suche “verbessernde” Kante.
  - Gehe über diese Kante zu neuem Knoten.
  - Wiederhole bis das Optimum gefunden ist.
- Suche im Inneren des Polyhedrons einen Punkt und versuche das Optimum zu “sehen”.
  - Suche Punkt im Polyhedron.
  - Grenze Polyhedron mittels Hyperebene orthogonal zum Zielvektor ein.
  - Führe Halbierungssuche durch.

Einleitung

- Vorgestellt 1951 von Dantzig.

Einleitung

- Vorgestellt 1951 von Dantzig.
- In der Praxis das erfolgreichste Verfahren.

Einleitung

- Vorgestellt 1951 von Dantzig.
- In der Praxis das erfolgreichste Verfahren.
- Eingabe:

Einleitung

- Vorgestellt 1951 von Dantzig.
- In der Praxis das erfolgreichste Verfahren.
- Eingabe:
  - nicht-degeneriertes (ggf. unbeschränkt) LP

Einleitung

- Vorgestellt 1951 von Dantzig.
- In der Praxis das erfolgreichste Verfahren.
- Eingabe:
  - nicht-degeneriertes (ggf. unbeschränkt) LP
  - Sei das Lösungspolyhedron P.

Einleitung

- Vorgestellt 1951 von Dantzig.
- In der Praxis das erfolgreichste Verfahren.
- Eingabe:
  - nicht-degeneriertes (ggf. unbeschränkt) LP
  - Sei das Lösungspolyhedron P.
- Verfahren

Einleitung

- Vorgestellt 1951 von Dantzig.
- In der Praxis das erfolgreichste Verfahren.
- Eingabe:
  - nicht-degeneriertes (ggf. unbeschränkt) LP
  - Sei das Lösungspolyhedron P.
- Verfahren
  1. Bestimme beliebigen Knoten p auf P.

Einleitung

- Vorgestellt 1951 von Dantzig.
- In der Praxis das erfolgreichste Verfahren.
- Eingabe:
  - nicht-degeneriertes (ggf. unbeschränkt) LP
  - Sei das Lösungspolyhedron P.
- Verfahren
  1. Bestimme beliebigen Knoten p auf P.
  2. Solange es eine verbessernde Kante $e = (p, p')$ gibt:

Einleitung

- Vorgestellt 1951 von Dantzig.
- In der Praxis das erfolgreichste Verfahren.
- Eingabe:
  - nicht-degeneriertes (ggf. unbeschränkt) LP
  - Sei das Lösungspolyhedron P.
- Verfahren
  1. Bestimme beliebigen Knoten p auf P.
  2. Solange es eine verbessernde Kante $e = (p, p')$ gibt:
     1. Setze $p = p'$.

Einleitung

- Vorgestellt 1951 von Dantzig.
- In der Praxis das erfolgreichste Verfahren.
- Eingabe:
  - nicht-degeneriertes (ggf. unbeschränkt) LP
  - Sei das Lösungspolyhedron P.
- Verfahren
  1. Bestimme beliebigen Knoten p auf P.
  2. Solange es eine verbessernde Kante $e = (p, p')$ gibt:
     1. Setze $p = p'$.
  3. Gebe p aus.

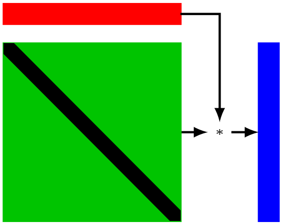
Einleitung

- Vorgestellt 1951 von Dantzig.
- In der Praxis das erfolgreichste Verfahren.
- Eingabe:
  - nicht-degeneriertes (ggf. unbeschränkt) LP
  - Sei das Lösungspolyhedron P.
- Verfahren
  1. Bestimme beliebigen Knoten p auf P.
  2. Solange es eine verbessernde Kante $e = (p, p')$ gibt:
     1. Setze $p = p'$.
  3. Gebe p aus.
- Der Wechsel über die Kante (p, p') heißt Pivotschritt.

Einleitung

- Vorgestellt 1951 von Dantzig.
- In der Praxis das erfolgreichste Verfahren.
- Eingabe:
  - nicht-degeneriertes (ggf. unbeschränkt) LP
  - Sei das Lösungspolyhedron P.
- Verfahren
  1. Bestimme beliebigen Knoten p auf P.
  2. Solange es eine verbessernde Kante $e = (p, p')$ gibt:
     1. Setze $p = p'$.
  3. Gebe p aus.
- Der Wechsel über die Kante (p, p') heißt Pivotschritt.

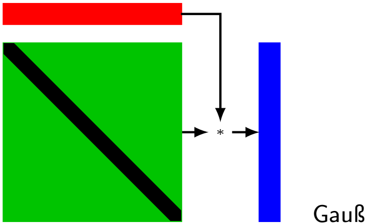
Vereinfachter Vergleich Simplex zu Gauß

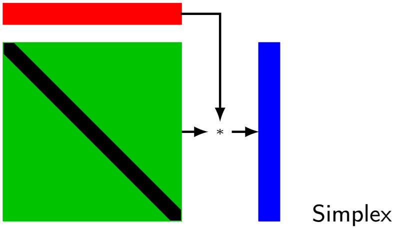


Gauß

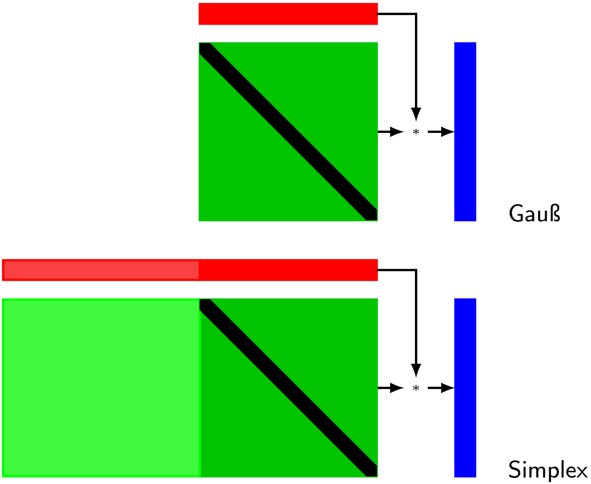
Simplex

Vereinfachter Vergleich Simplex zu Gauß





Vereinfachter Vergleich Simplex zu Gauß



Erinnerung

- Ungleichungssystem:

$$\text{Maximiere } {c'}^T x \text{ unter } A'x' \leqslant b' \text{ und } x' \geqslant 0.$$

Erinnerung

- Ungleichungssystem:

$$\text{Maximiere } {c'}^T x \text{ unter } A'x' \leqslant b' \text{ und } x' \geqslant 0.$$

- Algebraische Gleichungsform (mit Schlupfvariablen):

$$\text{Maximiere } c^T x \text{ unter } Ax = b \text{ und } x \geqslant 0.$$

Erinnerung

- Ungleichungssystem:
$$\text{Maximiere } {c'}^T x \text{ unter } A'x' \leqslant b' \text{ und } x' \geqslant 0.$$
- Algebraische Gleichungsform (mit Schlupfvariablen):
$$\text{Maximiere } c^T x \text{ unter } Ax = b \text{ und } x \geqslant 0.$$
- Neue Gestalt durch Spaltenauswahl: $A_\delta x_\delta + A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} = b$.

Erinnerung

- Ungleichungssystem:

$$\text{Maximiere } {c'}^T x \text{ unter } A'x' \leqslant b' \text{ und } x' \geqslant 0.$$

- Algebraische Gleichungsform (mit Schlupfvariablen):

$$\text{Maximiere } c^T x \text{ unter } Ax = b \text{ und } x \geqslant 0.$$

- Neue Gestalt durch Spaltenauswahl: $A_\delta x_\delta + A_{\bar\delta} x_{\bar\delta} = b$.
- Mit $x_{\bar\delta} = 0$ hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung. Dies ist eine Basislösung von der Algebraischen Gleichungsform.

$$x_\delta = A_\delta^{-1} b.$$

Erinnerung

- Ungleichungssystem:
$$\text{Maximiere } {c'}^T x \text{ unter } A'x' \leqslant b' \text{ und } x' \geqslant 0.$$
- Algebraische Gleichungsform (mit Schlupfvariablen):
$$\text{Maximiere } c^T x \text{ unter } Ax = b \text{ und } x \geqslant 0.$$
- Neue Gestalt durch Spaltenauswahl: $A_\delta x_\delta + A_{\bar\delta} x_{\bar\delta} = b$.
- Mit $x_{\bar\delta} = 0$ hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung. Dies ist eine Basislösung von der Algebraischen Gleichungsform.

$$x_\delta = A_\delta^{-1} b.$$

- Beachte A_δ ist invertierbar.

Erinnerung

- Ungleichungssystem:

$$\text{Maximiere } {c'}^T x \text{ unter } A'x' \leqslant b' \text{ und } x' \geqslant 0.$$

- Algebraische Gleichungsform (mit Schlupfvariablen):

$$\text{Maximiere } c^T x \text{ unter } Ax = b \text{ und } x \geqslant 0.$$

- Neue Gestalt durch Spaltenauswahl: $A_\delta x_\delta + A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} = b$.
- Mit $x_{\bar{\delta}} = 0$ hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung. Dies ist eine Basislösung von der Algebraischen Gleichungsform.

$$x_\delta = A_\delta^{-1} b.$$

- Beachte A_δ ist invertierbar.

Umformungen

- Situation:

Umformungen

- Situation:
  - $Ax = b$, $x \geqslant 0$ und maximiere $c^T x$.

Umformungen

- Situation:
  - $Ax = b$, $x \geqslant 0$ und maximiere $c^T x$.
  - A_δ invertierbar, der Form $A_\delta x_\delta + A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} = b$.

Umformungen

- Situation:
  - $Ax = b$, $x \geqslant 0$ und maximiere $c^T x$.
  - A_δ invertierbar, der Form $A_\delta x_\delta + A_{\bar\delta} x_{\bar\delta} = b$.
- Multiplikation mit A_δ^{-1} von links ergibt:

$$A_\delta x_\delta + A_{\bar\delta} x_{\bar\delta} \quad = \quad b$$

Umformungen

- Situation:
  - $Ax = b$, $x \geqslant 0$ und maximiere $c^T x$.
  - A_δ invertierbar, der Form $A_\delta x_\delta + A_{\bar\delta} x_{\bar\delta} = b$.
- Multiplikation mit A_δ^{-1} von links ergibt:

$$A_\delta x_\delta + A_{\bar\delta} x_{\bar\delta} \quad = \quad b$$

Umformungen

- Situation:
  - $Ax = b$, $x \geqslant 0$ und maximiere $c^T x$.
  - A_δ invertierbar, der Form $A_\delta x_\delta + A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} = b$.
- Multiplikation mit A_δ^{-1} von links ergibt:

$$\begin{array}{rcl} A_\delta x_\delta + A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} & = & b \\ A_\delta^{-1} \cdot A_\delta x_\delta + A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} & = & A_\delta^{-1} \cdot b \end{array}$$

Umformungen

- Situation:
  - $Ax = b$, $x \geqslant 0$ und maximiere $c^T x$.
  - A_δ invertierbar, der Form $A_\delta x_\delta + A_{\bar\delta} x_{\bar\delta} = b$.
- Multiplikation mit A_δ^{-1} von links ergibt:

$$
\begin{aligned}
A_\delta x_\delta + A_{\bar\delta} x_{\bar\delta} &= b \\
A_\delta^{-1} \cdot A_\delta x_\delta + A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta} x_{\bar\delta} &= A_\delta^{-1} \cdot b \\
x_\delta + A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta} x_{\bar\delta} &= A_\delta^{-1} \cdot b
\end{aligned}
$$

Umformungen

- Situation:
  - $Ax = b$, $x \geqslant 0$ und maximiere $c^T x$.
  - A_δ invertierbar, der Form $A_\delta x_\delta + A_{\bar\delta} x_{\bar\delta} = b$.
- Multiplikation mit A_δ^{-1} von links ergibt:

$$
\begin{aligned}
A_\delta x_\delta + A_{\bar\delta} x_{\bar\delta} &= b \\
A_\delta^{-1} \cdot A_\delta x_\delta + A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta} x_{\bar\delta} &= A_\delta^{-1} \cdot b \\
x_\delta + A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta} x_{\bar\delta} &= A_\delta^{-1} \cdot b \\
x_\delta &= A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta} x_{\bar\delta}
\end{aligned}
$$

Umformungen

- Situation:
  - $Ax = b$, $x \geqslant 0$ und maximiere $c^T x$.
  - A_δ invertierbar, der Form $A_\delta x_\delta + A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} = b$.
- Multiplikation mit A_δ^{-1} von links ergibt:

$$
\begin{aligned}
A_\delta x_\delta + A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} &= b \\
A_\delta^{-1} \cdot A_\delta x_\delta + A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} &= A_\delta^{-1} \cdot b \\
x_\delta + A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} &= A_\delta^{-1} \cdot b \\
x_\delta &= A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} \\
x_\delta &= A_\delta^{-1} \cdot b - \hat{A} x_{\bar{\delta}}
\end{aligned}
$$

Umformungen

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

- Situation:
  - $Ax = b$, $x \geqslant 0$ und maximiere $c^T x$.
  - A_δ invertierbar, der Form $A_\delta x_\delta + A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} = b$.
- Multiplikation mit A_δ^{-1} von links ergibt:

$$
\begin{aligned}
A_\delta x_\delta + A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} &= b \\
A_\delta^{-1} \cdot A_\delta x_\delta + A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} &= A_\delta^{-1} \cdot b \\
x_\delta + A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} &= A_\delta^{-1} \cdot b \\
x_\delta &= A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} \\
x_\delta &= A_\delta^{-1} \cdot b - \hat{A} x_{\bar{\delta}} \\
x_\delta &= \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}}
\end{aligned}
$$

- Da für die Basislösung $x_{\bar{\delta}} = 0$ gilt, erhalten wir:

$$x_\delta = A_\delta^{-1} \cdot b = \hat{b}.$$

Umformungen

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}}x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

- Situation:
  - $Ax = b$, $x \geqslant 0$ und maximiere $c^T x$.
  - A_δ invertierbar, der Form $A_\delta x_\delta + A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} = b$.
- Multiplikation mit A_δ^{-1} von links ergibt:

$$
\begin{aligned}
A_\delta x_\delta + A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} &= b \\
A_\delta^{-1} \cdot A_\delta x_\delta + A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} &= A_\delta^{-1} \cdot b \\
x_\delta + A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} &= A_\delta^{-1} \cdot b \\
x_\delta &= A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} \\
x_\delta &= A_\delta^{-1} \cdot b - \hat{A} x_{\bar{\delta}} \\
x_\delta &= \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}}
\end{aligned}
$$

- Da für die Basislösung $x_{\bar{\delta}} = 0$ gilt, erhalten wir:

$$x_\delta = A_\delta^{-1} \cdot b = \hat{b}.$$

- Die Zielfunktion hat dann den Wert $c^T \cdot A_\delta^{-1} \cdot b = c^T \cdot \hat{b}$.

Umformungen

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

- Situation:
  - $Ax = b$, $x \geqslant 0$ und maximiere $c^T x$.
  - A_δ invertierbar, der Form $A_\delta x_\delta + A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} = b$.
- Multiplikation mit A_δ^{-1} von links ergibt:

$$\begin{aligned}
A_\delta x_\delta + A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} &= b \\
A_\delta^{-1} \cdot A_\delta x_\delta + A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} &= A_\delta^{-1} \cdot b \\
x_\delta + A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} &= A_\delta^{-1} \cdot b \\
x_\delta &= A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} \\
x_\delta &= A_\delta^{-1} \cdot b - \hat{A} x_{\bar{\delta}} \\
x_\delta &= \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}}
\end{aligned}$$

- Da für die Basislösung $x_{\bar{\delta}} = 0$ gilt, erhalten wir:

$$x_\delta = A_\delta^{-1} \cdot b = \hat{b}.$$

- Die Zielfunktion hat dann den Wert $c^T \cdot A_\delta^{-1} \cdot b = c^T \cdot \hat{b}$.

Optimalität

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

- Versuche nun, von einer Basislösung aus eine Kante zu finden:

Optimalität

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}}x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

- Versuche nun, von einer Basislösung aus eine Kante zu finden:
  - Basislösung: $x_\delta = \hat{b} = \hat{b} - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}}x_{\bar{\delta}}$ mit $x_{\bar{\delta}} = 0$.

Optimalität

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

- Versuche nun, von einer Basislösung aus eine Kante zu finden:
  - Basislösung: $x_\delta = \hat{b} = \hat{b} - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$ mit $x_{\bar{\delta}} = 0$.
  - Zielfunktionswert: $c^T \cdot \hat{b}$.

Optimalität

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

- Versuche nun, von einer Basislösung aus eine Kante zu finden:
  - Basislösung: $x_\delta = \hat{b} = \hat{b} - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$ mit $x_{\bar{\delta}} = 0$.
  - Zielfunktionswert: $c^T \cdot \hat{b}$.
- Um von der Basislösung abzuweichen, ist $x_{\bar{\delta}}$ zu verändern.

Optimalität

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

- Versuche nun, von einer Basislösung aus eine Kante zu finden:
  - Basislösung: $x_\delta = \hat{b} = \hat{b} - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$ mit $x_{\bar{\delta}} = 0$.
  - Zielfunktionswert: $c^T \cdot \hat{b}$.
- Um von der Basislösung abzuweichen, ist $x_{\bar{\delta}}$ zu verändern.
- Wir können die Variablen der Basis als Funktion der Nichtbasisvariablen auffassen.

Optimalität

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

- Versuche nun, von einer Basislösung aus eine Kante zu finden:
  - Basislösung: $x_\delta = \hat{b} = \hat{b} - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$ mit $x_{\bar{\delta}} = 0$.
  - Zielfunktionswert: $c^T \cdot \hat{b}$.
- Um von der Basislösung abzuweichen, ist $x_{\bar{\delta}}$ zu verändern.
- Wir können die Variablen der Basis als Funktion der Nichtbasisvariablen auffassen.
- Auch kann der Zielfunktionswert als Funktion von $x_{\bar{\delta}}$ aufgefasst werden.

$$c^T \cdot x = c_\delta^T \cdot x_\delta + c_{\bar{\delta}}^T \cdot x_{\bar{\delta}}$$

Optimalität

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

- Versuche nun, von einer Basislösung aus eine Kante zu finden:
  - Basislösung: $x_\delta = \hat{b} = \hat{b} - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$ mit $x_{\bar{\delta}} = 0$.
  - Zielfunktionswert: $c^T \cdot \hat{b}$.
- Um von der Basislösung abzuweichen, ist $x_{\bar{\delta}}$ zu verändern.
- Wir können die Variablen der Basis als Funktion der Nichtbasisvariablen auffassen.
- Auch kann der Zielfunktionswert als Funktion von $x_{\bar{\delta}}$ aufgefasst werden.

$$c^T \cdot x = c_\delta^T \cdot x_\delta + c_{\bar{\delta}}^T \cdot x_{\bar{\delta}}$$

Optimalität

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}}x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

- Versuche nun, von einer Basislösung aus eine Kante zu finden:
  - Basislösung: $x_\delta = \hat{b} = \hat{b} - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}}x_{\bar{\delta}}$ mit $x_{\bar{\delta}} = 0$.
  - Zielfunktionswert: $c^T \cdot \hat{b}$.
- Um von der Basislösung abzuweichen, ist $x_{\bar{\delta}}$ zu verändern.
- Wir können die Variablen der Basis als Funktion der Nichtbasisvariablen auffassen.
- Auch kann der Zielfunktionswert als Funktion von $x_{\bar{\delta}}$ aufgefasst werden.

$$\begin{aligned} c^T \cdot x &= c_\delta^T \cdot x_\delta + c_{\bar{\delta}}^T \cdot x_{\bar{\delta}} \\ &= c_\delta^T \cdot (\hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}}) + c_{\bar{\delta}}^T \cdot x_{\bar{\delta}} \end{aligned}$$

Optimalität

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

- Versuche nun, von einer Basislösung aus eine Kante zu finden:
  - Basislösung: $x_\delta = \hat{b} = \hat{b} - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$ mit $x_{\bar{\delta}} = 0$.
  - Zielfunktionswert: $c^T \cdot \hat{b}$.
- Um von der Basislösung abzuweichen, ist $x_{\bar{\delta}}$ zu verändern.
- Wir können die Variablen der Basis als Funktion der Nichtbasisvariablen auffassen.
- Auch kann der Zielfunktionswert als Funktion von $x_{\bar{\delta}}$ aufgefasst werden.

$$\begin{aligned} c^T \cdot x &= c_\delta^T \cdot x_\delta + c_{\bar{\delta}}^T \cdot x_{\bar{\delta}} \\ &= c_\delta^T \cdot (\hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}}) + c_{\bar{\delta}}^T \cdot x_{\bar{\delta}} \\ &= c_\delta^T \cdot \hat{b} - c_\delta^T \cdot \hat{A}x_{\bar{\delta}} + c_{\bar{\delta}}^T \cdot x_{\bar{\delta}} \end{aligned}$$

Optimalität

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}}x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

- Versuche nun, von einer Basislösung aus eine Kante zu finden:
  - Basislösung: $x_\delta = \hat{b} = \hat{b} - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}}x_{\bar{\delta}}$ mit $x_{\bar{\delta}} = 0$.
  - Zielfunktionswert: $c^T \cdot \hat{b}$.
- Um von der Basislösung abzuweichen, ist $x_{\bar{\delta}}$ zu verändern.
- Wir können die Variablen der Basis als Funktion der Nichtbasisvariablen auffassen.
- Auch kann der Zielfunktionswert als Funktion von $x_{\bar{\delta}}$ aufgefasst werden.

$$\begin{aligned}
c^T \cdot x &= c_\delta^T \cdot x_\delta + c_{\bar{\delta}}^T \cdot x_{\bar{\delta}} \\
&= c_\delta^T \cdot (\hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}}) + c_{\bar{\delta}}^T \cdot x_{\bar{\delta}} \\
&= c_\delta^T \cdot \hat{b} - c_\delta^T \cdot \hat{A}x_{\bar{\delta}} + c_{\bar{\delta}}^T \cdot x_{\bar{\delta}} \\
&= c_\delta^T \cdot \hat{b} + (c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}) \cdot x_{\bar{\delta}}
\end{aligned}$$

- Der Vektor $c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ wird als Vektor der reduzierten Kosten bezeichnet.

Optimalität

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

- Versuche nun, von einer Basislösung aus eine Kante zu finden:
  - Basislösung: $x_\delta = \hat{b} = \hat{b} - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$ mit $x_{\bar{\delta}} = 0$.
  - Zielfunktionswert: $c^T \cdot \hat{b}$.
- Um von der Basislösung abzuweichen, ist $x_{\bar{\delta}}$ zu verändern.
- Wir können die Variablen der Basis als Funktion der Nichtbasisvariablen auffassen.
- Auch kann der Zielfunktionswert als Funktion von $x_{\bar{\delta}}$ aufgefasst werden.

$$\begin{aligned} c^T \cdot x &= c_\delta^T \cdot x_\delta + c_{\bar{\delta}}^T \cdot x_{\bar{\delta}} \\ &= c_\delta^T \cdot (\hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}}) + c_{\bar{\delta}}^T \cdot x_{\bar{\delta}} \\ &= c_\delta^T \cdot \hat{b} - c_\delta^T \cdot \hat{A}x_{\bar{\delta}} + c_{\bar{\delta}}^T \cdot x_{\bar{\delta}} \\ &= c_\delta^T \cdot \hat{b} + (c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}) \cdot x_{\bar{\delta}} \end{aligned}$$

- Der Vektor $c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ wird als <u>Vektor der reduzierten Kosten</u> bezeichnet.
- Für jeden Eintrag des Vektors der reduzierten Kosten gilt:

Optimalität

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

- Versuche nun, von einer Basislösung aus eine Kante zu finden:
  - Basislösung: $x_\delta = \hat{b} = \hat{b} - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$ mit $x_{\bar{\delta}} = 0$.
  - Zielfunktionswert: $c^T \cdot \hat{b}$.
- Um von der Basislösung abzuweichen, ist $x_{\bar{\delta}}$ zu verändern.
- Wir können die Variablen der Basis als Funktion der Nichtbasisvariablen auffassen.
- Auch kann der Zielfunktionswert als Funktion von $x_{\bar{\delta}}$ aufgefasst werden.

$$\begin{aligned} c^T \cdot x &= c_\delta^T \cdot x_\delta + c_{\bar{\delta}}^T \cdot x_{\bar{\delta}} \\ &= c_\delta^T \cdot (\hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}}) + c_{\bar{\delta}}^T \cdot x_{\bar{\delta}} \\ &= c_\delta^T \cdot \hat{b} - c_\delta^T \cdot \hat{A}x_{\bar{\delta}} + c_{\bar{\delta}}^T \cdot x_{\bar{\delta}} \\ &= c_\delta^T \cdot \hat{b} + (c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}) \cdot x_{\bar{\delta}} \end{aligned}$$

- Der Vektor $c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ wird als Vektor der reduzierten Kosten bezeichnet.
- Für jeden Eintrag des Vektors der reduzierten Kosten gilt:
  - Der Eintrag zeigt an, wie sich die Zielfunktion ändert.

Optimalität

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

- Versuche nun, von einer Basislösung aus eine Kante zu finden:
  - Basislösung: $x_\delta = \hat{b} = \hat{b} - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$ mit $x_{\bar{\delta}} = 0$.
  - Zielfunktionswert: $c^T \cdot \hat{b}$.
- Um von der Basislösung abzuweichen, ist $x_{\bar{\delta}}$ zu verändern.
- Wir können die Variablen der Basis als Funktion der Nichtbasisvariablen auffassen.
- Auch kann der Zielfunktionswert als Funktion von $x_{\bar{\delta}}$ aufgefasst werden.

$$\begin{aligned} c^T \cdot x &= c_\delta^T \cdot x_\delta + c_{\bar{\delta}}^T \cdot x_{\bar{\delta}} \\ &= c_\delta^T \cdot (\hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}}) + c_{\bar{\delta}}^T \cdot x_{\bar{\delta}} \\ &= c_\delta^T \cdot \hat{b} - c_\delta^T \cdot \hat{A}x_{\bar{\delta}} + c_{\bar{\delta}}^T \cdot x_{\bar{\delta}} \\ &= c_\delta^T \cdot \hat{b} + (c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}) \cdot x_{\bar{\delta}} \end{aligned}$$

- Der Vektor $c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ wird als Vektor der reduzierten Kosten bezeichnet.
- Für jeden Eintrag des Vektors der reduzierten Kosten gilt:
  - Der Eintrag zeigt an, wie sich die Zielfunktion ändert.
  - Falls der Eintrag positiv ist, verbessert sich die Zielfunktion.

Optimalität

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar\delta} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta}x_{\bar\delta}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

- Versuche nun, von einer Basislösung aus eine Kante zu finden:
  - Basislösung: $x_\delta = \hat{b} = \hat{b} - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta}x_{\bar\delta}$ mit $x_{\bar\delta} = 0$.
  - Zielfunktionswert: $c^T \cdot \hat{b}$.
- Um von der Basislösung abzuweichen, ist $x_{\bar\delta}$ zu verändern.
- Wir können die Variablen der Basis als Funktion der Nichtbasisvariablen auffassen.
- Auch kann der Zielfunktionswert als Funktion von $x_{\bar\delta}$ aufgefasst werden.

$$\begin{aligned}
c^T \cdot x &= c_\delta^T \cdot x_\delta + c_{\bar\delta}^T \cdot x_{\bar\delta} \\
&= c_\delta^T \cdot (\hat{b} - \hat{A}x_{\bar\delta}) + c_{\bar\delta}^T \cdot x_{\bar\delta} \\
&= c_\delta^T \cdot \hat{b} - c_\delta^T \cdot \hat{A}x_{\bar\delta} + c_{\bar\delta}^T \cdot x_{\bar\delta} \\
&= c_\delta^T \cdot \hat{b} + (c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}) \cdot x_{\bar\delta}
\end{aligned}$$

- Der Vektor $c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ wird als Vektor der reduzierten Kosten bezeichnet.
- Für jeden Eintrag des Vektors der reduzierten Kosten gilt:
  - Der Eintrag zeigt an, wie sich die Zielfunktion ändert.
  - Falls der Eintrag positiv ist, verbessert sich die Zielfunktion.
  - Dazu ist die zugehörige Komponente (Eintrag) zu ändern.

Optimalität

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}}x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

- Versuche nun, von einer Basislösung aus eine Kante zu finden:
  - Basislösung: $x_\delta = \hat{b} = \hat{b} - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}}x_{\bar{\delta}}$ mit $x_{\bar{\delta}} = 0$.
  - Zielfunktionswert: $c^T \cdot \hat{b}$.
- Um von der Basislösung abzuweichen, ist $x_{\bar{\delta}}$ zu verändern.
- Wir können die Variablen der Basis als Funktion der Nichtbasisvariablen auffassen.
- Auch kann der Zielfunktionswert als Funktion von $x_{\bar{\delta}}$ aufgefasst werden.

$$\begin{aligned}
c^T \cdot x &= c_\delta^T \cdot x_\delta + c_{\bar{\delta}}^T \cdot x_{\bar{\delta}} \\
&= c_\delta^T \cdot (\hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}}) + c_{\bar{\delta}}^T \cdot x_{\bar{\delta}} \\
&= c_\delta^T \cdot \hat{b} - c_\delta^T \cdot \hat{A}x_{\bar{\delta}} + c_{\bar{\delta}}^T \cdot x_{\bar{\delta}} \\
&= c_\delta^T \cdot \hat{b} + (c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}) \cdot x_{\bar{\delta}}
\end{aligned}$$

- Der Vektor $c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ wird als Vektor der reduzierten Kosten bezeichnet.
- Für jeden Eintrag des Vektors der reduzierten Kosten gilt:
  - Der Eintrag zeigt an, wie sich die Zielfunktion ändert.
  - Falls der Eintrag positiv ist, verbessert sich die Zielfunktion.
  - Dazu ist die zugehörige Komponente (Eintrag) zu ändern.

Kriterium zur Optimalität

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$ $[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$ $c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

Theorem

Falls der Vektor der reduzierten Kosten zu einer Basis δ keine positiven Einträge hat, so ist zugehörige Lösung x_δ optimal.

Beweis:

Kriterium zur Optimalität

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$ $[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$ $c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

Theorem

Falls der Vektor der reduzierten Kosten zu einer Basis δ keine positiven Einträge hat, so ist zugehörige Lösung x_δ optimal.

Beweis:

Kriterium zur Optimalität

Theorem

Falls der Vektor der reduzierten Kosten zu einer Basis δ keine positiven Einträge hat, so ist zugehörige Lösung x_δ optimal.

Beweis:

- Es gelte: $c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A} \leqslant 0$.

Kriterium zur Optimalität

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$ $[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$ $c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

Theorem

Falls der Vektor der reduzierten Kosten zu einer Basis δ keine positiven Einträge hat, so ist zugehörige Lösung x_δ optimal.

Beweis:

- Es gelte: $c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A} \leqslant 0$.
- Sei $x' \in P$ beliebige zulässige Lösung.

Kriterium zur Optimalität

Theorem

Falls der Vektor der reduzierten Kosten zu einer Basis δ keine positiven Einträge hat, so ist zugehörige Lösung x_δ optimal.

Beweis:

- Es gelte: $c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A} \leqslant 0$.
- Sei $x' \in P$ beliebige zulässige Lösung.
- Damit gilt $x' \geqslant 0$ und

Kriterium zur Optimalität

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\overline{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\overline{\delta}} x_{\overline{\delta}}$ $[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$ $c_{\overline{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

Theorem

Falls der Vektor der reduzierten Kosten zu einer Basis δ keine positiven Einträge hat, so ist zugehörige Lösung x_δ optimal.

Beweis:

- Es gelte: $c_{\overline{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A} \leqslant 0$.
- Sei $x' \in P$ beliebige zulässige Lösung.
- Damit gilt $x' \geqslant 0$ und
- weiter gilt $x'_{\overline{\delta}} \geqslant 0$.

Kriterium zur Optimalität

Theorem

Falls der Vektor der reduzierten Kosten zu einer Basis δ keine positiven Einträge hat, so ist zugehörige Lösung x_δ optimal.

Beweis:

- Es gelte: $c_{\overline{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A} \leqslant 0$.
- Sei $x' \in P$ beliebige zulässige Lösung.
- Damit gilt $x' \geqslant 0$ und
- weiter gilt $x'_{\overline{\delta}} \geqslant 0$.
- Damit erhalten wir:

$$c^T \cdot x' = c_\delta^T \cdot \hat{b} + (c_{\overline{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}) \cdot x'_{\overline{\delta}} \leqslant x_\delta^T \cdot \hat{b}.$$

Kriterium zur Optimalität

Theorem

Falls der Vektor der reduzierten Kosten zu einer Basis δ keine positiven Einträge hat, so ist zugehörige Lösung x_δ optimal.

Beweis:

- Es gelte: $c_{\overline{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A} \leqslant 0$.
- Sei $x' \in P$ beliebige zulässige Lösung.
- Damit gilt $x' \geqslant 0$ und
- weiter gilt $x'_{\overline{\delta}} \geqslant 0$.
- Damit erhalten wir:

$$c^T \cdot x' = c_\delta^T \cdot \hat{b} + (c_{\overline{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}) \cdot x'_{\overline{\delta}} \leqslant x_\delta^T \cdot \hat{b}.$$

- Der Basisvektor x_δ hat den Zielfunktionswert $x_\delta^T \hat{b}$.

Kriterium zur Optimalität

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\overline{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\overline{\delta}} x_{\overline{\delta}}$ $[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$ $c_{\overline{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

Theorem

Falls der Vektor der reduzierten Kosten zu einer Basis δ keine positiven Einträge hat, so ist zugehörige Lösung x_δ optimal.

Beweis:

- Es gelte: $c_{\overline{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A} \leqslant 0$.
- Sei $x' \in P$ beliebige zulässige Lösung.
- Damit gilt $x' \geqslant 0$ und
- weiter gilt $x'_{\overline{\delta}} \geqslant 0$.
- Damit erhalten wir:

$$c^T \cdot x' = c_\delta^T \cdot \hat{b} + (c_{\overline{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}) \cdot x'_{\overline{\delta}} \leqslant x_\delta^T \cdot \hat{b}.$$

- Der Basisvektor x_δ hat den Zielfunktionswert $x_\delta^T \hat{b}$.
- Damit ist er optimal.

Kriterium zur Optimalität

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\overline{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\overline{\delta}} x_{\overline{\delta}}$ $[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$ $c_{\overline{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

Theorem

Falls der Vektor der reduzierten Kosten zu einer Basis δ keine positiven Einträge hat, so ist zugehörige Lösung x_δ optimal.

Beweis:

- Es gelte: $c_{\overline{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A} \leqslant 0$.
- Sei $x' \in P$ beliebige zulässige Lösung.
- Damit gilt $x' \geqslant 0$ und
- weiter gilt $x'_{\overline{\delta}} \geqslant 0$.
- Damit erhalten wir:

$$c^T \cdot x' = c_\delta^T \cdot \hat{b} + (c_{\overline{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}) \cdot x'_{\overline{\delta}} \leqslant x_\delta^T \cdot \hat{b}.$$

- Der Basisvektor x_δ hat den Zielfunktionswert $x_\delta^T \hat{b}$.
- Damit ist er optimal.

Folgerung

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

- Falls der Vektor $y = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ der reduzierten Kosten keine positiven Einträge hat, so terminiert das Verfahren.

Folgerung

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

- Falls der Vektor $y = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ der reduzierten Kosten keine positiven Einträge hat, so terminiert das Verfahren.
- Anderenfalls suchen wir eine verbessernde Basislösung:

Folgerung

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

- Falls der Vektor $y = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ der reduzierten Kosten keine positiven Einträge hat, so terminiert das Verfahren.
- Anderenfalls suchen wir eine verbessernde Basislösung:
  - Sei x_j eine Nichtbasisvariable mit positiven reduzierten Kosten. D.h.

$$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0.$$

Folgerung

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

- Falls der Vektor $y = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ der reduzierten Kosten keine positiven Einträge hat, so terminiert das Verfahren.
- Anderenfalls suchen wir eine verbessernde Basislösung:
  - Sei x_j eine Nichtbasisvariable mit positiven reduzierten Kosten. D.h.

$$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0.$$

  - Wir verändern nun <u>nur</u> x_j.

Folgerung

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

- Falls der Vektor $y = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ der reduzierten Kosten keine positiven Einträge hat, so terminiert das Verfahren.
- Anderenfalls suchen wir eine verbessernde Basislösung:
  - Sei x_j eine Nichtbasisvariable mit positiven reduzierten Kosten. D.h.

$$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0.$$

  - Wir verändern nun nur x_j.
  - Eine Vergrößerung von x_j vergrößert auch

Folgerung

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

- Falls der Vektor $y = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ der reduzierten Kosten keine positiven Einträge hat, so terminiert das Verfahren.
- Anderenfalls suchen wir eine verbessernde Basislösung:
  - Sei x_j eine Nichtbasisvariable mit positiven reduzierten Kosten. D.h.

$$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0.$$

  - Wir verändern nun <u>nur</u> x_j.
  - Eine Vergrößerung von x_j vergrößert auch
    - die Zielfunktion $c_\delta^T \cdot \hat{b} + (c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}) \cdot x_{\bar{\delta}}$ und

Folgerung

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

- Falls der Vektor $y = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ der reduzierten Kosten keine positiven Einträge hat, so terminiert das Verfahren.
- Anderenfalls suchen wir eine verbessernde Basislösung:
  - Sei x_j eine Nichtbasisvariable mit positiven reduzierten Kosten. D.h.

$$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0.$$

  - Wir verändern nun <u>nur</u> x_j.
  - Eine Vergrößerung von x_j vergrößert auch
    - die Zielfunktion $c_\delta^T \cdot \hat{b} + (c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}) \cdot x_{\bar{\delta}}$ und
    - verändert die Gleichung $x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}}$, d.h.

Folgerung

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

- Falls der Vektor $y = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ der reduzierten Kosten keine positiven Einträge hat, so terminiert das Verfahren.
- Anderenfalls suchen wir eine verbessernde Basislösung:
  - Sei x_j eine Nichtbasisvariable mit positiven reduzierten Kosten. D.h.

$$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0.$$

  - Wir verändern nun <u>nur</u> x_j.
  - Eine Vergrößerung von x_j vergrößert auch
    - die Zielfunktion $c_\delta^T \cdot \hat{b} + (c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}) \cdot x_{\bar{\delta}}$ und
    - verändert die Gleichung $x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}}$, d.h.
    - für jede Komponente gilt: $x_{\delta(i)} = \hat{b}_i - \hat{a}_{i,j}x_j$.

Folgerung

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

- Falls der Vektor $y = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ der reduzierten Kosten keine positiven Einträge hat, so terminiert das Verfahren.
- Anderenfalls suchen wir eine verbessernde Basislösung:
  - Sei x_j eine Nichtbasisvariable mit positiven reduzierten Kosten. D.h.

$$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0.$$

  - Wir verändern nun nur x_j.
  - Eine Vergrößerung von x_j vergrößert auch
    - die Zielfunktion $c_\delta^T \cdot \hat{b} + (c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}) \cdot x_{\bar{\delta}}$ und
    - verändert die Gleichung $x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}}$, d.h.
    - für jede Komponente gilt: $x_{\delta(i)} = \hat{b}_i - \hat{a}_{i,j}x_j$.
    - Beachte dabei, Variablen $x_{\bar{\delta}(k)}$ $k \neq j$ sind fixiert und $x_{\bar{\delta}(k)} = 0$.

Folgerung

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

- Falls der Vektor $y = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ der reduzierten Kosten keine positiven Einträge hat, so terminiert das Verfahren.
- Anderenfalls suchen wir eine verbessernde Basislösung:
  - Sei x_j eine Nichtbasisvariable mit positiven reduzierten Kosten. D.h.

$$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0.$$

  - Wir verändern nun nur x_j.
  - Eine Vergrößerung von x_j vergrößert auch
    - die Zielfunktion $c_\delta^T \cdot \hat{b} + (c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}) \cdot x_{\bar{\delta}}$ und
    - verändert die Gleichung $x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}}$, d.h.
    - für jede Komponente gilt: $x_{\delta(i)} = \hat{b}_i - \hat{a}_{i,j}x_j$.
    - Beachte dabei, Variablen $x_{\bar{\delta}(k)}$ $k \neq j$ sind fixiert und $x_{\bar{\delta}(k)} = 0$.
    - Falls die Lösung beschränkt ist, so

Folgerung

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

- Falls der Vektor $y = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ der reduzierten Kosten keine positiven Einträge hat, so terminiert das Verfahren.
- Anderenfalls suchen wir eine verbessernde Basislösung:
  - Sei x_j eine Nichtbasisvariable mit positiven reduzierten Kosten. D.h.

$$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0.$$

  - Wir verändern nun <u>nur</u> x_j.
  - Eine Vergrößerung von x_j vergrößert auch
    - die Zielfunktion $c_\delta^T \cdot \hat{b} + (c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}) \cdot x_{\bar{\delta}}$ und
    - verändert die Gleichung $x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}}$, d.h.
    - für jede Komponente gilt: $x_{\delta(i)} = \hat{b}_i - \hat{a}_{i,j}x_j$.
    - Beachte dabei, Variablen $x_{\bar{\delta}(k)}$ $k \neq j$ sind fixiert und $x_{\bar{\delta}(k)} = 0$.
    - Falls die Lösung beschränkt ist, so
    - vergrößere x_j, solange $x_{\delta(i)} = \hat{b}_i - \hat{a}_{i,j}x_j \geqslant 0$ gilt.

Folgerung

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

- Falls der Vektor $y = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ der reduzierten Kosten keine positiven Einträge hat, so terminiert das Verfahren.
- Anderenfalls suchen wir eine verbessernde Basislösung:
  - Sei x_j eine Nichtbasisvariable mit positiven reduzierten Kosten. D.h.

$$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0.$$

  - Wir verändern nun <u>nur</u> x_j.
  - Eine Vergrößerung von x_j vergrößert auch
    - die Zielfunktion $c_\delta^T \cdot \hat{b} + (c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}) \cdot x_{\bar{\delta}}$ und
    - verändert die Gleichung $x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}}$, d.h.
    - für jede Komponente gilt: $x_{\delta(i)} = \hat{b}_i - \hat{a}_{i,j}x_j$.
    - Beachte dabei, Variablen $x_{\bar{\delta}(k)}$ $k \neq j$ sind fixiert und $x_{\bar{\delta}(k)} = 0$.
    - Falls die Lösung beschränkt ist, so
    - vergrößere x_j, solange $x_{\delta(i)} = \hat{b}_i - \hat{a}_{i,j}x_j \geqslant 0$ gilt.

Verfeinertes Simplexverfahren

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

1. Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.

Verfeinertes Simplexverfahren

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

1. Problem: Maximiere $c'^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
2. Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.

Verfeinertes Simplexverfahren

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

1. Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
2. Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
3. Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.

Verfeinertes Simplexverfahren

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

1. Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
2. Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
3. Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
   - Bestimme $x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$ als Basislösung.

Verfeinertes Simplexverfahren

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > \mathbf{0}$

1. Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
2. Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
3. Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
   - Bestimme $x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$ als Basislösung.
   - Bestimme Vektor der reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$.

Verfeinertes Simplexverfahren

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar\delta} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta} x_{\bar\delta}$

$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

1. Problem: Maximiere $c'^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
2. Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
3. Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
   - Bestimme $x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$ als Basislösung.
   - Bestimme Vektor der reduzierten Kosten: $r = c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$.
4. Solange r einen positiven Eintrag r_j hat, wiederhole:

Verfeinertes Simplexverfahren

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

1. Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
2. Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
3. Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
   - Bestimme $x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$ als Basislösung.
   - Bestimme Vektor der reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$.
4. Solange r einen positiven Eintrag r_j hat, wiederhole:
   1. Falls für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gilt $\hat{a}_{i,j} \leqslant 0$, so

Verfeinertes Simplexverfahren

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

1. Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
2. Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
3. Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
   - Bestimme $x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$ als Basislösung.
   - Bestimme Vektor der reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$.
4. Solange r einen positiven Eintrag r_j hat, wiederhole:
   1. Falls für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gilt $\hat{a}_{i,j} \leqslant 0$, so
      - kann der Wert x_j beliebig erhöht werden.

Verfeinertes Simplexverfahren

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

1. Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
2. Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
3. Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
   - Bestimme $x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$ als Basislösung.
   - Bestimme Vektor der reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$.
4. Solange r einen positiven Eintrag r_j hat, wiederhole:
   1. Falls für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gilt $\hat{a}_{i,j} \leqslant 0$, so
      - kann der Wert x_j beliebig erhöht werden.
      - Damit gebe aus: “die Lösung ist unbeschränkt”.

Verfeinertes Simplexverfahren

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar\delta} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta} x_{\bar\delta}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

1. Problem: Maximiere $c'^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
2. Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
3. Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
   - Bestimme $x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$ als Basislösung.
   - Bestimme Vektor der reduzierten Kosten: $r = c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$.
4. Solange r einen positiven Eintrag r_j hat, wiederhole:
   1. Falls für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gilt $\hat{a}_{i,j} \leqslant 0$, so
      - kann der Wert x_j beliebig erhöht werden.
      - Damit gebe aus: “die Lösung ist unbeschränkt”.
   2. Wähle nun aus: $i = \mathrm{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m}\{\frac{\hat{b}_k}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0\}$.

Verfeinertes Simplexverfahren

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

1. Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
2. Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
3. Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
   - Bestimme $x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$ als Basislösung.
   - Bestimme Vektor der reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$.
4. Solange r einen positiven Eintrag r_j hat, wiederhole:
   1. Falls für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gilt $\hat{a}_{i,j} \leqslant 0$, so
      - kann der Wert x_j beliebig erhöht werden.
      - Damit gebe aus: "die Lösung ist unbeschränkt".
   2. Wähle nun aus: $i = \text{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m}\{ \frac{\hat{b}_k}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0\}$.
   3. Setze $x_j = \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{i,j}}$ und bestimme dadurch neues x_δ:

Verfeinertes Simplexverfahren

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

1. Problem: Maximiere $c'^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
2. Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
3. Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
   - Bestimme $x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$ als Basislösung.
   - Bestimme Vektor der reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$.
4. Solange r einen positiven Eintrag r_j hat, wiederhole:
   1. Falls für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gilt $\hat{a}_{i,j} \leqslant 0$, so
      - kann der Wert x_j beliebig erhöht werden.
      - Damit gebe aus: "die Lösung ist unbeschränkt".
   2. Wähle nun aus: $i = \text{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m}\{\frac{\hat{b}_k}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0\}$.
   3. Setze $x_j = \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{i,j}}$ und bestimme dadurch neues x_δ:
      1. Ersetze Spalte $\hat{A}_{\delta(i)}$ durch Spalte $\hat{A}_j$.

Verfeinertes Simplexverfahren

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

1. Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
2. Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
3. Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
   - Bestimme $x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$ als Basislösung.
   - Bestimme Vektor der reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$.
4. Solange r einen positiven Eintrag r_j hat, wiederhole:
   1. Falls für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gilt $\hat{a}_{i,j} \leqslant 0$, so
      - kann der Wert x_j beliebig erhöht werden.
      - Damit gebe aus: "die Lösung ist unbeschränkt".
   2. Wähle nun aus: $i = \text{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m}\{\frac{\hat{b}_k}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0\}$.
   3. Setze $x_j = \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{i,j}}$ und bestimme dadurch neues x_δ:
      1. Ersetze Spalte $\hat{A}_{\delta(i)}$ durch Spalte $\hat{A}_j$.
   4. Bestimme neu: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$.

Verfeinertes Simplexverfahren

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar\delta} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta}x_{\bar\delta}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

1. Problem: Maximiere $c'^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
2. Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
3. Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
   - Bestimme $x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$ als Basislösung.
   - Bestimme Vektor der reduzierten Kosten: $r = c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$.
4. Solange r einen positiven Eintrag r_j hat, wiederhole:
   1. Falls für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gilt $\hat{a}_{i,j} \leqslant 0$, so
      - kann der Wert x_j beliebig erhöht werden.
      - Damit gebe aus: "die Lösung ist unbeschränkt".
   2. Wähle nun aus: $i = \text{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m}\{\frac{\hat{b}_k}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0\}$.
   3. Setze $x_j = \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{i,j}}$ und bestimme dadurch neues x_δ:
      1. Ersetze Spalte $\hat{A}_{\delta(i)}$ durch Spalte $\hat{A}_j$.
   4. Bestimme neu: $r = c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$.
5. Gebe x_δ aus.

Verfeinertes Simplexverfahren

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar\delta} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta} x_{\bar\delta}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

1. Problem: Maximiere $c'^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
2. Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
3. Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
   - Bestimme $x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$ als Basislösung.
   - Bestimme Vektor der reduzierten Kosten: $r = c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$.
4. Solange r einen positiven Eintrag r_j hat, wiederhole:
   1. Falls für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gilt $\hat{a}_{i,j} \leqslant 0$, so
      - kann der Wert x_j beliebig erhöht werden.
      - Damit gebe aus: "die Lösung ist unbeschränkt".
   2. Wähle nun aus: $i = \mathrm{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m} \{ \frac{\hat{b}_k}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0 \}$.
   3. Setze $x_j = \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{i,j}}$ und bestimme dadurch neues x_δ:
      1. Ersetze Spalte $\hat{A}_{\delta(i)}$ durch Spalte $\hat{A}_j$.
   4. Bestimme neu: $r = c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$.
5. Gebe x_δ aus.

Details zur Rechnung

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

- A_j wird Eingangspivotspalte genannt.

Details zur Rechnung

$$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\overline{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\overline{\delta}} x_{\overline{\delta}}$$
$$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$$
$$c_{\overline{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$$
$$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$$

- A_j wird Eingangspivotspalte genannt.
- $A_{\delta(i)}$ wird Ausgangspivotspalte genannt.

Details zur Rechnung

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

- A_j wird Eingangspivotspalte genannt.
- $A_{\delta(i)}$ wird Ausgangspivotspalte genannt.
- Das “Austauschen” von $A_{\delta(i)}$ durch A_j entspricht dem Verfolgen einer Kante.

Details zur Rechnung

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

- A_j wird Eingangspivotspalte genannt.
- $A_{\delta(i)}$ wird Ausgangspivotspalte genannt.
- Das "Austauschen" von $A_{\delta(i)}$ durch A_j entspricht dem Verfolgen einer Kante.
- Es sollte danach aber wieder die Gleichung $\hat{A} \cdot x = \hat{b}$ so umgeformt werden, dass $\hat{A}_\delta$ eine Einheitsmatrix ist.

Details zur Rechnung

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

- A_j wird Eingangspivotspalte genannt.
- $A_{\delta(i)}$ wird Ausgangspivotspalte genannt.
- Das "Austauschen" von $A_{\delta(i)}$ durch A_j entspricht dem Verfolgen einer Kante.
- Es sollte danach aber wieder die Gleichung $\hat{A} \cdot x = \hat{b}$ so umgeformt werden, dass $\hat{A}_\delta$ eine Einheitsmatrix ist.
- Verfahre dazu analog wie im Verfahren von Gauß:

Details zur Rechnung

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

- A_j wird Eingangspivotspalte genannt.
- $A_{\delta(i)}$ wird Ausgangspivotspalte genannt.
- Das "Austauschen" von $A_{\delta(i)}$ durch A_j entspricht dem Verfolgen einer Kante.
- Es sollte danach aber wieder die Gleichung $\hat{A} \cdot x = \hat{b}$ so umgeformt werden, dass $\hat{A}_\delta$ eine Einheitsmatrix ist.
- Verfahre dazu analog wie im Verfahren von Gauß:
  1. Zeile $(\hat{a}_i, \hat{b}_i)$ wird mit $1/\hat{a}_{i,j}$ multipliziert. Danach gilt $\hat{a}_{i,j} = 1$.

Details zur Rechnung

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

- A_j wird Eingangspivotspalte genannt.
- $A_{\delta(i)}$ wird Ausgangspivotspalte genannt.
- Das "Austauschen" von $A_{\delta(i)}$ durch A_j entspricht dem Verfolgen einer Kante.
- Es sollte danach aber wieder die Gleichung $\hat{A} \cdot x = \hat{b}$ so umgeformt werden, dass $\hat{A}_\delta$ eine Einheitsmatrix ist.
- Verfahre dazu analog wie im Verfahren von Gauß:
  1. Zeile $(\hat{a}_i, \hat{b}_i)$ wird mit $1/\hat{a}_{i,j}$ multipliziert. Danach gilt $\hat{a}_{i,j} = 1$.
  2. Für $k \neq i$ multipliziere die neue i-te Zeile mit $-\hat{a}_{k,j}$ und addiere sie zur Zeile $(\hat{a}_k, \hat{b}_k)$. Danach gilt $\hat{a}_{k,j} = 0$.

Details zur Rechnung

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

- A_j wird Eingangspivotspalte genannt.
- $A_{\delta(i)}$ wird Ausgangspivotspalte genannt.
- Das "Austauschen" von $A_{\delta(i)}$ durch A_j entspricht dem Verfolgen einer Kante.
- Es sollte danach aber wieder die Gleichung $\hat{A} \cdot x = \hat{b}$ so umgeformt werden, dass $\hat{A}_\delta$ eine Einheitsmatrix ist.
- Verfahre dazu analog wie im Verfahren von Gauß:
  1. Zeile $(\hat{a}_i, \hat{b}_i)$ wird mit $1/\hat{a}_{i,j}$ multipliziert. Danach gilt $\hat{a}_{i,j} = 1$.
  2. Für $k \neq i$ multipliziere die neue i-te Zeile mit $-\hat{a}_{k,j}$ und addiere sie zur Zeile $(\hat{a}_k, \hat{b}_k)$. Danach gilt $\hat{a}_{k,j} = 0$.

Beispiel

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar\delta} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta} x_{\bar\delta}$

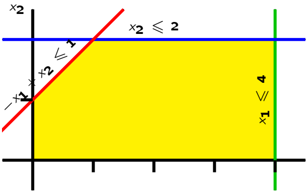
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Beispiel

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar\delta} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta} x_{\bar\delta}$

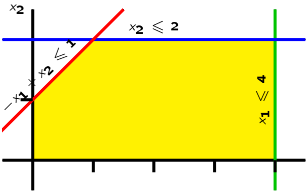
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



- Sei ein kanonisches Ungleichungssystem gegeben:

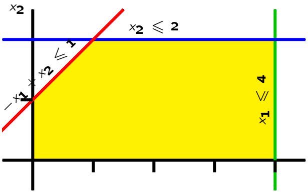
$$\begin{array}{rl} x_1 \leqslant 4 & x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \leqslant 2 & x_2 \geqslant 0 \\ -x_1 + x_2 \leqslant 1 & \end{array}$$

Beispiel

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



- Sei ein kanonisches Ungleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned} x_1 &\leqslant 4 & x_1 &\geqslant 0 \\ x_2 &\leqslant 2 & x_2 &\geqslant 0 \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 1 \end{aligned}$$

- In der algebraische Gleichungsform erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 & x_1 &\geqslant 0 & x_3 &\geqslant 0 \\ x_2 + x_4 &= 2 & x_2 &\geqslant 0 & x_4 &\geqslant 0 \\ -x_1 + x_2 + x_5 &= 1 & & & x_5 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Beispiel

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

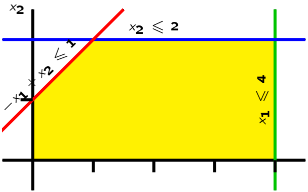
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Gleichungssystem als Tabelle:

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
−1	1	0	0	1	1

- Sei ein kanonisches Ungleichungssystem gegeben:

$$\begin{array}{rl} x_1 \leqslant 4 & x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \leqslant 2 & x_2 \geqslant 0 \\ -x_1 + x_2 \leqslant 1 & \end{array}$$

- In der algebraische Gleichungsform erhalten wir:

$$\begin{array}{rll} x_1 + x_3 = 4 & x_1 \geqslant 0 & x_3 \geqslant 0 \\ x_2 + x_4 = 2 & x_2 \geqslant 0 & x_4 \geqslant 0 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1 & & x_5 \geqslant 0 \end{array}$$

- Aufgelöst nach den Schlupfvariablen:

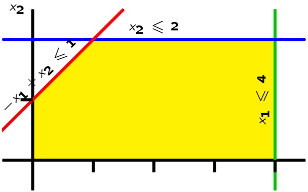
$$\begin{aligned} x_3 &= 4 - x_1 \\ x_4 &= 2 - x_2 \\ x_5 &= 1 + x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Beispiel

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Gleichungssystem als Tabelle:

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
−1	1	0	0	1	1

- Sei ein kanonisches Ungleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned} x_1 &\leqslant 4 & x_1 &\geqslant 0 \\ x_2 &\leqslant 2 & x_2 &\geqslant 0 \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 1 \end{aligned}$$

- In der algebraische Gleichungsform erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 & x_1 &\geqslant 0 & x_3 &\geqslant 0 \\ x_2 + x_4 &= 2 & x_2 &\geqslant 0 & x_4 &\geqslant 0 \\ -x_1 + x_2 + x_5 &= 1 & & & x_5 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

- Aufgelöst nach den Schlupfvariablen:

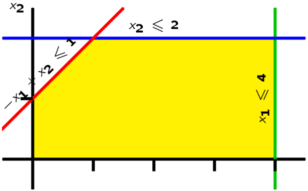
$$\begin{aligned} x_3 &= 4 - x_1 \\ x_4 &= 2 - x_2 \\ x_5 &= 1 + x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Gleichungssystem als Tabelle:

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
-1	1	0	0	1	1

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

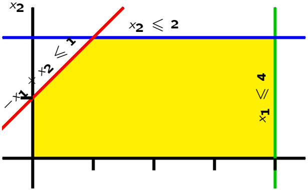
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Gleichungssystem als Tabelle:

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
−1	1	0	0	1	1

- Die Spalten 3, 4, 5 bilden eine Basis.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

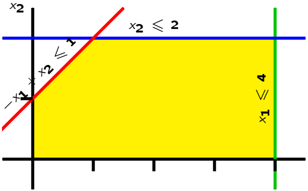
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Gleichungssystem als Tabelle:

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
-1	1	0	0	1	1

- Die Spalten 3, 4, 5 bilden eine Basis.
- D.h. $\delta(\{1,2,3\}) = \{3,4,5\}$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

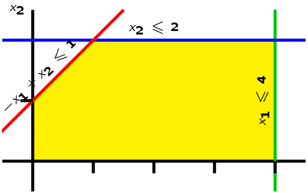
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Gleichungssystem als Tabelle:

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
-1	1	0	0	1	1

- Die Spalten 3, 4, 5 bilden eine Basis.
- D.h. $\delta(\{1, 2, 3\}) = \{3, 4, 5\}$.
- Damit ist die Matrix A_δ eine Einheitsmatrix.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

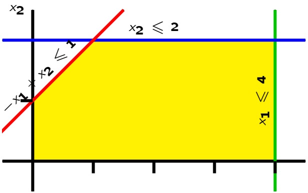
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Gleichungssystem als Tabelle:

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
−1	1	0	0	1	1

- Die Spalten 3, 4, 5 bilden eine Basis.
- D.h. $\delta(\{1, 2, 3\}) = \{3, 4, 5\}$.
- Damit ist die Matrix A_δ eine Einheitsmatrix.
- Die zugehörige Basislösung $x_\delta = b$ ist zulässig, da $x_\delta \geqslant 0$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

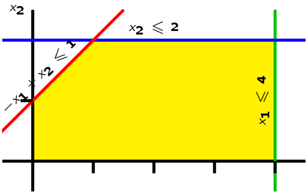
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Gleichungssystem als Tabelle:

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
−1	1	0	0	1	1

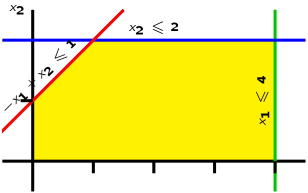
- Die Spalten 3, 4, 5 bilden eine Basis.
- D.h. $\delta(\{1, 2, 3\}) = \{3, 4, 5\}$.
- Damit ist die Matrix A_δ eine Einheitsmatrix.
- Die zugehörige Basislösung $x_\delta = b$ ist zulässig, da $x_\delta \geqslant 0$.
- Damit haben wir eine Startlösung.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar\delta} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta} x_{\bar\delta}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Gleichungssystem als Tabelle:

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
-1	1	0	0	1	1

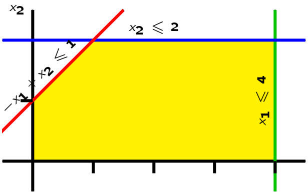
- Die Spalten 3, 4, 5 bilden eine Basis.
- D.h. $\delta(\{1,2,3\}) = \{3,4,5\}$.
- Damit ist die Matrix A_δ eine Einheitsmatrix.
- Die zugehörige Basislösung $x_\delta = b$ ist zulässig, da $x_\delta \geqslant 0$.
- Damit haben wir eine Startlösung.
- Weiter gilt: $c_\delta = (0, 0, 0)$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar\delta} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta} x_{\bar\delta}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Gleichungssystem als Tabelle:

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
-1	1	0	0	1	1

- Die Spalten 3, 4, 5 bilden eine Basis.
- D.h. $\delta(\{1,2,3\}) = \{3,4,5\}$.
- Damit ist die Matrix A_δ eine Einheitsmatrix.
- Die zugehörige Basislösung $x_\delta = b$ ist zulässig, da $x_\delta \geqslant 0$.
- Damit haben wir eine Startlösung.
- Weiter gilt: $c_\delta = (0,0,0)$.
- Nun müssen wir die reduzierten Kosten: $r = c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ betrachten.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar\delta} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta} x_{\bar\delta}$

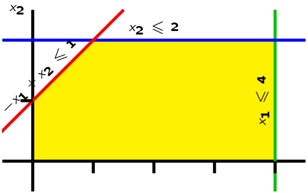
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Gleichungssystem als Tabelle:

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
-1	1	0	0	1	1

- Die Spalten 3, 4, 5 bilden eine Basis.
- D.h. $\delta(\{1,2,3\}) = \{3,4,5\}$.
- Damit ist die Matrix A_δ eine Einheitsmatrix.
- Die zugehörige Basislösung $x_\delta = b$ ist zulässig, da $x_\delta \geqslant 0$.
- Damit haben wir eine Startlösung.
- Weiter gilt: $c_\delta = (0,0,0)$.
- Nun müssen wir die reduzierten Kosten: $r = c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ betrachten.
- Betrachte Spalte 2, d.h. $\hat{A}_{\bar\delta(2)}$:

  $c_{\bar\delta(2)} - c_\delta \cdot \hat{A}_\delta \to c_2 = 2$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

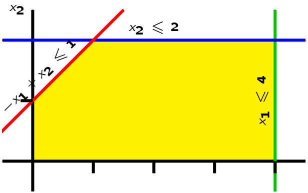
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Gleichungssystem als Tabelle:

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
−1	1	0	0	1	1

- Die Spalten 3, 4, 5 bilden eine Basis.
- D.h. $\delta(\{1,2,3\}) = \{3,4,5\}$.
- Damit ist die Matrix A_δ eine Einheitsmatrix.
- Die zugehörige Basislösung $x_\delta = b$ ist zulässig, da $x_\delta \geqslant 0$.
- Damit haben wir eine Startlösung.
- Weiter gilt: $c_\delta = (0, 0, 0)$.
- Nun müssen wir die reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ betrachten.
- Betrachte Spalte 2, d.h. $\hat{A}_{\bar{\delta}(2)}$:
  $c_{\bar{\delta}(2)} - c_\delta \cdot \hat{A}_\delta \to c_2 = 2$.
- Spalte 2 ist die Eingangspivotspalte.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

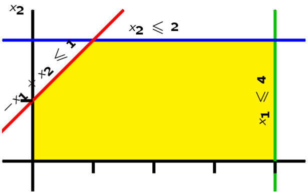
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Gleichungssystem als Tabelle:

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
-1	1	0	0	1	1

- Die Spalten 3, 4, 5 bilden eine Basis.
- D.h. $\delta(\{1, 2, 3\}) = \{3, 4, 5\}$.
- Damit ist die Matrix A_δ eine Einheitsmatrix.
- Die zugehörige Basislösung $x_\delta = b$ ist zulässig, da $x_\delta \geqslant 0$.
- Damit haben wir eine Startlösung.
- Weiter gilt: $c_\delta = (0, 0, 0)$.
- Nun müssen wir die reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ betrachten.
- Betrachte Spalte 2, d.h. $\hat{A}_{\bar{\delta}(2)}$:
  $c_{\bar{\delta}(2)} - c_\delta \cdot \hat{A}_\delta \to c_2 = 2$.
- Spalte 2 ist die Eingangspivotspalte.
- Der Term $\hat{b}_i / \hat{a}_{i,2}$ mit $\hat{a}_{i,2} > 0$ wird minimiert für $i = 3$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

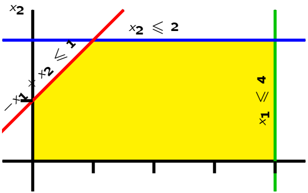
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Gleichungssystem als Tabelle:

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
-1	1	0	0	1	1

- Die Spalten 3, 4, 5 bilden eine Basis.
- D.h. $\delta(\{1, 2, 3\}) = \{3, 4, 5\}$.
- Damit ist die Matrix A_δ eine Einheitsmatrix.
- Die zugehörige Basislösung $x_\delta = b$ ist zulässig, da $x_\delta \geqslant 0$.
- Damit haben wir eine Startlösung.
- Weiter gilt: $c_\delta = (0, 0, 0)$.
- Nun müssen wir die reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ betrachten.
- Betrachte Spalte 2, d.h. $\hat{A}_{\bar{\delta}(2)}$:
  $c_{\bar{\delta}(2)} - c_\delta \cdot \hat{A}_\delta \rightarrow c_2 = 2$.
- Spalte 2 ist die Eingangspivotspalte.
- Der Term $\hat{b}_i / \hat{a}_{i,2}$ mit $\hat{a}_{i,2} > 0$ wird minimiert für $i = 3$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
−1	1	0	0	1	1

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\overline{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\overline{\delta}} x_{\overline{\delta}}$

$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\overline{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
-1	1	0	0	1	1

- Der Term $\hat{b}_i / \hat{a}_{i,2}$ mit $\hat{a}_{i,2} > 0$ würde minimiert für $i = 3$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\overline{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\overline{\delta}} x_{\overline{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\overline{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
−1	1	0	0	1	1

- Der Term $\hat{b}_i / \hat{a}_{i,2}$ mit $\hat{a}_{i,2} > 0$ würde minimiert für $i = 3$.
- Damit ist die Ausgangspivotspalte $\hat{A}_{\delta(3)} = \hat{A}_5$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
-1	1	0	0	1	1

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	-1	1
-1	1	0	0	1	1

- Der Term $\hat{b}_i / \hat{a}_{i,2}$ mit $\hat{a}_{i,2} > 0$ würde minimiert für $i = 3$.
- Damit ist die Ausgangspivotspalte $\hat{A}_{\delta(3)} = \hat{A}_5$.
- Der Pivotschritt tauscht damit $\hat{A}_5$ durch $\hat{A}_2$ aus:

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar\delta} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta} x_{\bar\delta}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
-1	1	0	0	1	1

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	-1	1
-1	1	0	0	1	1

- Der Term $\hat{b}_i / \hat{a}_{i,2}$ mit $\hat{a}_{i,2} > 0$ würde minimiert für $i = 3$.
- Damit ist die Ausgangspivotspalte $\hat{A}_{\delta(3)} = \hat{A}_5$.
- Der Pivotschritt tauscht damit $\hat{A}_5$ durch $\hat{A}_2$ aus:
  1. Dividiere 3. Zeile durch $\hat{a}_{3,2}$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
−1	1	0	0	1	1

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	−1	1
−1	1	0	0	1	1

- Der Term $\hat{b}_i / \hat{a}_{i,2}$ mit $\hat{a}_{i,2} > 0$ würde minimiert für $i = 3$.
- Damit ist die Ausgangspivotspalte $\hat{A}_{\delta(3)} = \hat{A}_5$.
- Der Pivotschritt tauscht damit $\hat{A}_5$ durch $\hat{A}_2$ aus:
  1. Dividiere 3. Zeile durch $\hat{a}_{3,2}$.
  2. Addiere diese Zeile multipliziert mit $-\hat{a}_{1,2} = 0$ zur 1. Zeile .

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
−1	1	0	0	1	1

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	−1	1
−1	1	0	0	1	1

- Der Term $\hat{b}_i / \hat{a}_{i,2}$ mit $\hat{a}_{i,2} > 0$ würde minimiert für $i = 3$.
- Damit ist die Ausgangspivotspalte $\hat{A}_{\delta(3)} = \hat{A}_5$.
- Der Pivotschritt tauscht damit $\hat{A}_5$ durch $\hat{A}_2$ aus:
  1. Dividiere 3. Zeile durch $\hat{a}_{3,2}$.
  2. Addiere diese Zeile multipliziert mit $-\hat{a}_{1,2} = 0$ zur 1. Zeile .
  3. Addiere diese Zeile multipliziert mit $-\hat{a}_{2,2} = -1$ zur 2. Zeile .

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
-1	1	0	0	1	1

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	-1	1
-1	1	0	0	1	1

- Der Term $\hat{b}_i/\hat{a}_{i,2}$ mit $\hat{a}_{i,2} > 0$ würde minimiert für $i = 3$.
- Damit ist die Ausgangspivotspalte $\hat{A}_{\delta(3)} = \hat{A}_5$.
- Der Pivotschritt tauscht damit $\hat{A}_5$ durch $\hat{A}_2$ aus:
  1. Dividiere 3. Zeile durch $\hat{a}_{3,2}$.
  2. Addiere diese Zeile multipliziert mit $-\hat{a}_{1,2} = 0$ zur 1. Zeile .
  3. Addiere diese Zeile multipliziert mit $-\hat{a}_{2,2} = -1$ zur 2. Zeile .
- Neue Basis: $\delta(\{1,2,3\}) = \{3,4,2\}$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar\delta} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta} x_{\bar\delta}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
−1	1	0	0	1	1

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	−1	1
−1	1	0	0	1	1

- Der Term $\hat{b}_i/\hat{a}_{i,2}$ mit $\hat{a}_{i,2} > 0$ würde minimiert für $i = 3$.
- Damit ist die Ausgangspivotspalte $\hat{A}_{\delta(3)} = \hat{A}_5$.
- Der Pivotschritt tauscht damit $\hat{A}_5$ durch $\hat{A}_2$ aus:
  1. Dividiere 3. Zeile durch $\hat{a}_{3,2}$.
  2. Addiere diese Zeile multipliziert mit $-\hat{a}_{1,2} = 0$ zur 1. Zeile .
  3. Addiere diese Zeile multipliziert mit $-\hat{a}_{2,2} = -1$ zur 2. Zeile .
- Neue Basis: $\delta(\{1, 2, 3\}) = \{3, 4, 2\}$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

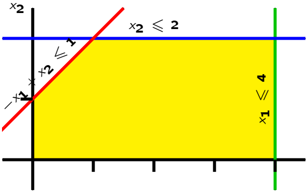
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Gleichungssystem als Tabelle:

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	−1	1
−1	1	0	0	1	1

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

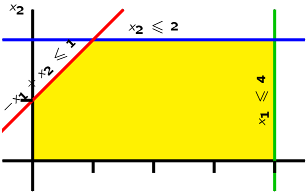
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Gleichungssystem als Tabelle:

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	−1	1
−1	1	0	0	1	1

- Neue Basis: $\delta(\{1, 2, 3\}) = \{3, 4, 2\}$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

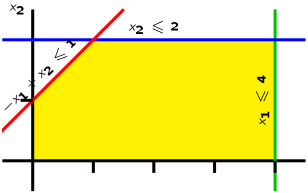
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Gleichungssystem als Tabelle:

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	−1	1
−1	1	0	0	1	1

- Neue Basis: $\delta(\{1,2,3\}) = \{3,4,2\}$.
- Damit $c_\delta = (0,0,2)$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

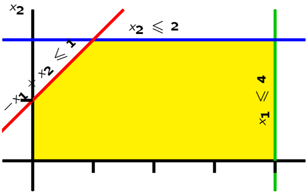
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Gleichungssystem als Tabelle:

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	−1	1
−1	1	0	0	1	1

- Neue Basis: $\delta(\{1,2,3\}) = \{3,4,2\}$.
- Damit $c_\delta = (0,0,2)$.
- Nun müssen wir die reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ betrachten.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar\delta} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta} x_{\bar\delta}$

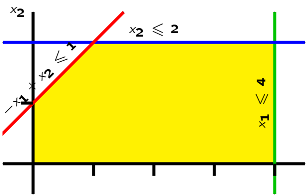
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Gleichungssystem als Tabelle:

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	−1	1
−1	1	0	0	1	1

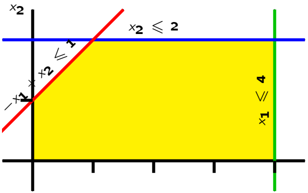
- Neue Basis: $\delta(\{1,2,3\}) = \{3,4,2\}$.
- Damit $c_\delta = (0,0,2)$.
- Nun müssen wir die reduzierten Kosten: $r = c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ betrachten.
- Betrachte Spalte 1, d.h. $\hat{A}_{\bar\delta(1)}$:
  $c_{\bar\delta(1)} - c_\delta \cdot \hat{A}_\delta \to c_1 = (-1) - 2 \cdot (-1) = 1$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Gleichungssystem als Tabelle:

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	−1	1
−1	1	0	0	1	1

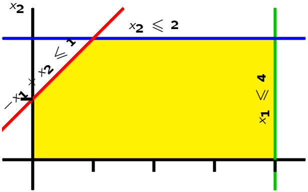
- Neue Basis: $\delta(\{1,2,3\}) = \{3,4,2\}$.
- Damit $c_\delta = (0,0,2)$.
- Nun müssen wir die reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ betrachten.
- Betrachte Spalte 1, d.h. $\hat{A}_{\bar{\delta}(1)}$: $c_{\bar{\delta}(1)} - c_\delta \cdot \hat{A}_\delta \to c_1 = (-1) - 2 \cdot (-1) = 1$.
- Spalte 1 ist die Eingangspivotspalte.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar\delta} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta} x_{\bar\delta}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Gleichungssystem als Tabelle:

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	−1	1
−1	1	0	0	1	1

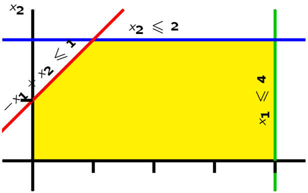
- Neue Basis: $\delta(\{1,2,3\}) = \{3,4,2\}$.
- Damit $c_\delta = (0,0,2)$.
- Nun müssen wir die reduzierten Kosten: $r = c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ betrachten.
- Betrachte Spalte 1, d.h. $\hat{A}_{\bar\delta(1)}$:
  $c_{\bar\delta(1)} - c_\delta \cdot \hat{A}_\delta \to c_1 = (-1) - 2 \cdot (-1) = 1$.
- Spalte 1 ist die Eingangspivotspalte.
- Der Term $\hat{b}_i / \hat{a}_{i,1}$ mit $\hat{a}_{i,1} > 0$ wird minimiert für $i = 2$.

Beispiel zum Pivotschritt

$$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$$
$$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$$
$$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$$
$$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Gleichungssystem als Tabelle:

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	-1	1
-1	1	0	0	1	1

- Neue Basis: $\delta(\{1,2,3\}) = \{3,4,2\}$.
- Damit $c_\delta = (0,0,2)$.
- Nun müssen wir die reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ betrachten.
- Betrachte Spalte 1, d.h. $\hat{A}_{\bar{\delta}(1)}$:
  $c_{\bar{\delta}(1)} - c_\delta \cdot \hat{A}_\delta \to c_1 = (-1) - 2 \cdot (-1) = 1$.
- Spalte 1 ist die Eingangspivotspalte.
- Der Term $\hat{b}_i / \hat{a}_{i,1}$ mit $\hat{a}_{i,1} > 0$ wird minimiert für $i = 2$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	−1	1
−1	1	0	0	1	1

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar\delta} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta} x_{\bar\delta}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	-1	1
-1	1	0	0	1	1

- Der Term $\hat{b}_i / \hat{a}_{i,1}$ mit $\hat{a}_{i,1} > 0$ würde minimiert für $i = 2$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	-1	1
-1	1	0	0	1	1

- Der Term $\hat{b}_i / \hat{a}_{i,1}$ mit $\hat{a}_{i,1} > 0$ würde minimiert für $i = 2$.
- Damit ist die Ausgangspivotspalte $\hat{A}_{\delta(2)} = \hat{A}_4$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\overline{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\overline{\delta}} x_{\overline{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\overline{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	−1	1
−1	1	0	0	1	1

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
0	0	1	−1	1	3
1	0	0	1	−1	1
0	1	0	1	0	2

- Der Term $\hat{b}_i/\hat{a}_{i,1}$ mit $\hat{a}_{i,1} > 0$ würde minimiert für $i = 2$.
- Damit ist die Ausgangspivotspalte $\hat{A}_{\delta(2)} = \hat{A}_4$.
- Der Pivotschritt tauscht damit $\hat{A}_4$ durch $\hat{A}_1$ aus:

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar\delta} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta} x_{\bar\delta}$

$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	-1	1
-1	1	0	0	1	1

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
0	0	1	-1	1	3
1	0	0	1	-1	1
0	1	0	1	0	2

- Der Term $\hat{b}_i / \hat{a}_{i,1}$ mit $\hat{a}_{i,1} > 0$ würde minimiert für $i = 2$.
- Damit ist die Ausgangspivotspalte $\hat{A}_{\delta(2)} = \hat{A}_4$.
- Der Pivotschritt tauscht damit $\hat{A}_4$ durch $\hat{A}_1$ aus:
  1. Dividiere 2. Zeile durch $\hat{a}_{2,1}$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	-1	1
-1	1	0	0	1	1

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
0	0	1	-1	1	3
1	0	0	1	-1	1
0	1	0	1	0	2

- Der Term $\hat{b}_i/\hat{a}_{i,1}$ mit $\hat{a}_{i,1} > 0$ würde minimiert für $i = 2$.
- Damit ist die Ausgangspivotspalte $\hat{A}_{\delta(2)} = \hat{A}_4$.
- Der Pivotschritt tauscht damit $\hat{A}_4$ durch $\hat{A}_1$ aus:
  1. Dividiere 2. Zeile durch $\hat{a}_{2,1}$.
  2. Addiere diese Zeile multipliziert mit $-\hat{a}_{1,1} = -1$ zur 1. Zeile .

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	-1	1
-1	1	0	0	1	1

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
0	0	1	-1	1	3
1	0	0	1	-1	1
0	1	0	1	0	2

- Der Term $\hat{b}_i / \hat{a}_{i,1}$ mit $\hat{a}_{i,1} > 0$ würde minimiert für $i = 2$.
- Damit ist die Ausgangspivotspalte $\hat{A}_{\delta(2)} = \hat{A}_4$.
- Der Pivotschritt tauscht damit $\hat{A}_4$ durch $\hat{A}_1$ aus:
  1. Dividiere 2. Zeile durch $\hat{a}_{2,1}$.
  2. Addiere diese Zeile multipliziert mit $-\hat{a}_{1,1} = -1$ zur 1. Zeile .
  3. Addiere diese Zeile multipliziert mit $-\hat{a}_{3,1} = 1$ zur 3. Zeile .

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar\delta} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta} x_{\bar\delta}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	−1	1
−1	1	0	0	1	1

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
0	0	1	−1	1	3
1	0	0	1	−1	1
0	1	0	1	0	2

- Der Term $\hat{b}_i / \hat{a}_{i,1}$ mit $\hat{a}_{i,1} > 0$ würde minimiert für $i = 2$.
- Damit ist die Ausgangspivotspalte $\hat{A}_{\delta(2)} = \hat{A}_4$.
- Der Pivotschritt tauscht damit $\hat{A}_4$ durch $\hat{A}_1$ aus:
  1. Dividiere 2. Zeile durch $\hat{a}_{2,1}$.
  2. Addiere diese Zeile multipliziert mit $-\hat{a}_{1,1} = -1$ zur 1. Zeile .
  3. Addiere diese Zeile multipliziert mit $-\hat{a}_{3,1} = 1$ zur 3. Zeile .
- Neue Basis: $\delta(\{1, 2, 3\}) = \{3, 1, 2\}$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	-1	1
-1	1	0	0	1	1

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
0	0	1	-1	1	3
1	0	0	1	-1	1
0	1	0	1	0	2

- Der Term $\hat{b}_i / \hat{a}_{i,1}$ mit $\hat{a}_{i,1} > 0$ würde minimiert für $i = 2$.
- Damit ist die Ausgangspivotspalte $\hat{A}_{\delta(2)} = \hat{A}_4$.
- Der Pivotschritt tauscht damit $\hat{A}_4$ durch $\hat{A}_1$ aus:
  1. Dividiere 2. Zeile durch $\hat{a}_{2,1}$.
  2. Addiere diese Zeile multipliziert mit $-\hat{a}_{1,1} = -1$ zur 1. Zeile .
  3. Addiere diese Zeile multipliziert mit $-\hat{a}_{3,1} = 1$ zur 3. Zeile .
- Neue Basis: $\delta(\{1, 2, 3\}) = \{3, 1, 2\}$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

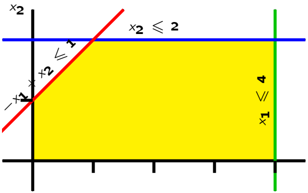
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
0	0	1	−1	1	3
1	0	0	1	−1	1
0	1	0	1	0	2

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

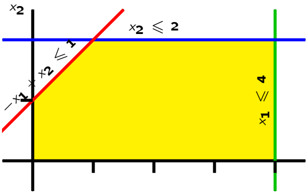
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
0	0	1	−1	1	3
1	0	0	1	−1	1
0	1	0	1	0	2

- Basis ist nun: $\delta(\{1, 2, 3\}) = \{3, 1, 2\}$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

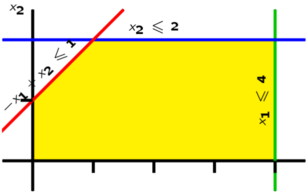
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
0	0	1	−1	1	3
1	0	0	1	−1	1
0	1	0	1	0	2

- Basis ist nun: $\delta(\{1,2,3\}) = \{3,1,2\}$.
- Damit gilt: $c_\delta = (0, -1, 2)$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

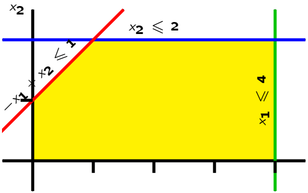
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
0	0	1	-1	1	3
1	0	0	1	-1	1
0	1	0	1	0	2

- Basis ist nun: $\delta(\{1, 2, 3\}) = \{3, 1, 2\}$.
- Damit gilt: $c_\delta = (0, -1, 2)$.
- Nun müssen wir die reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ betrachten.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

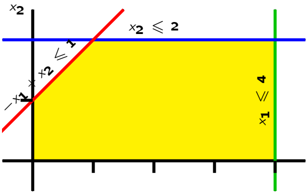
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
0	0	1	-1	1	3
1	0	0	1	-1	1
0	1	0	1	0	2

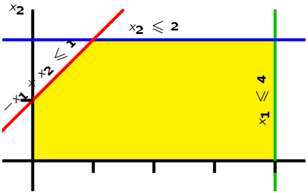
- Basis ist nun: $\delta(\{1, 2, 3\}) = \{3, 1, 2\}$.
- Damit gilt: $c_\delta = (0, -1, 2)$.
- Nun müssen wir die reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ betrachten.
- Alle reduzierten Kosten sind negativ.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
0	0	1	-1	1	3
1	0	0	1	-1	1
0	1	0	1	0	2

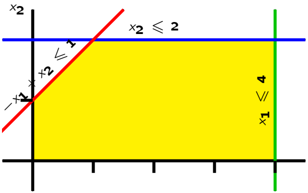
- Basis ist nun: $\delta(\{1, 2, 3\}) = \{3, 1, 2\}$.
- Damit gilt: $c_\delta = (0, -1, 2)$.
- Nun müssen wir die reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ betrachten.
- Alle reduzierten Kosten sind negativ.
- Verfahren terminiert.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
0	0	1	-1	1	3
1	0	0	1	-1	1
0	1	0	1	0	2

- Basis ist nun: $\delta(\{1,2,3\}) = \{3,1,2\}$.
- Damit gilt: $c_\delta = (0, -1, 2)$.
- Nun müssen wir die reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ betrachten.
- Alle reduzierten Kosten sind negativ.
- Verfahren terminiert.
- Lösung: $x = (1, 2, 3, 0, 0)$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

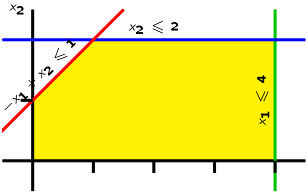
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
0	0	1	−1	1	3
1	0	0	1	−1	1
0	1	0	1	0	2

- Basis ist nun: $\delta(\{1, 2, 3\}) = \{3, 1, 2\}$.
- Damit gilt: $c_\delta = (0, -1, 2)$.
- Nun müssen wir die reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ betrachten.
- Alle reduzierten Kosten sind negativ.
- Verfahren terminiert.
- Lösung: $x = (1, 2, 3, 0, 0)$.
- Verlauf des Verfahrens:

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

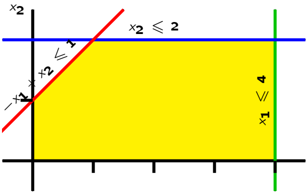
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
0	0	1	−1	1	3
1	0	0	1	−1	1
0	1	0	1	0	2

- Basis ist nun: $\delta(\{1,2,3\}) = \{3,1,2\}$.
- Damit gilt: $c_\delta = (0,-1,2)$.
- Nun müssen wir die reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ betrachten.
- Alle reduzierten Kosten sind negativ.
- Verfahren terminiert.
- Lösung: $x = (1,2,3,0,0)$.
- Verlauf des Verfahrens:
  1. $(\hat{A}_3, \hat{A}_4, \hat{A}_5)$ entspricht: $(0,0)$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

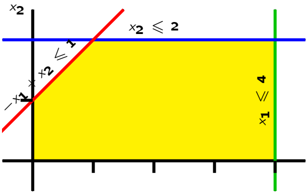
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
0	0	1	−1	1	3
1	0	0	1	−1	1
0	1	0	1	0	2

- Basis ist nun: $\delta(\{1, 2, 3\}) = \{3, 1, 2\}$.
- Damit gilt: $c_\delta = (0, -1, 2)$.
- Nun müssen wir die reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ betrachten.
- Alle reduzierten Kosten sind negativ.
- Verfahren terminiert.
- Lösung: $x = (1, 2, 3, 0, 0)$.
- Verlauf des Verfahrens:
  1. $(\hat{A}_3, \hat{A}_4, \hat{A}_5)$ entspricht: $(0, 0)$.
  2. $(\hat{A}_3, \hat{A}_4, \hat{A}_2)$ entspricht: $(0, 1)$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

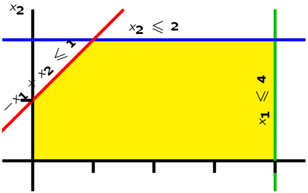
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
0	0	1	−1	1	3
1	0	0	1	−1	1
0	1	0	1	0	2

- Basis ist nun: $\delta(\{1,2,3\}) = \{3,1,2\}$.
- Damit gilt: $c_\delta = (0,-1,2)$.
- Nun müssen wir die reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ betrachten.
- Alle reduzierten Kosten sind negativ.
- Verfahren terminiert.
- Lösung: $x = (1,2,3,0,0)$.
- Verlauf des Verfahrens:
  1. $(\hat{A}_3, \hat{A}_4, \hat{A}_5)$ entspricht: $(0,0)$.
  2. $(\hat{A}_3, \hat{A}_4, \hat{A}_2)$ entspricht: $(0,1)$.
  3. $(\hat{A}_3, \hat{A}_1, \hat{A}_2)$ entspricht: $(1,2)$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

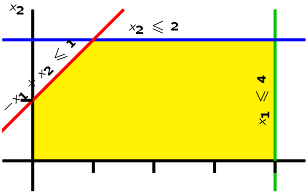
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j = \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
0	0	1	−1	1	3
1	0	0	1	−1	1
0	1	0	1	0	2

- Basis ist nun: $\delta(\{1,2,3\}) = \{3,1,2\}$.
- Damit gilt: $c_\delta = (0, -1, 2)$.
- Nun müssen wir die reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ betrachten.
- Alle reduzierten Kosten sind negativ.
- Verfahren terminiert.
- Lösung: $x = (1, 2, 3, 0, 0)$.
- Verlauf des Verfahrens:
  1. $(\hat{A}_3, \hat{A}_4, \hat{A}_5)$ entspricht: $(0, 0)$.
  2. $(\hat{A}_3, \hat{A}_4, \hat{A}_2)$ entspricht: $(0, 1)$.
  3. $(\hat{A}_3, \hat{A}_1, \hat{A}_2)$ entspricht: $(1, 2)$.

Bestimme initiale Basislösung

- Raum der zulässigen Lösungen ist beschrieben durch (o.B.d.A.: $b \geqslant 0$):
  $A \cdot x \leqslant b$ mit $x \geqslant 0$.

Bestimme initiale Basislösung

- Raum der zulässigen Lösungen ist beschrieben durch (o.B.d.A.: $b \geqslant 0$): $A \cdot x \leqslant b$ mit $x \geqslant 0$.
- Die Zielfunktion können wir hier ignorieren.

Bestimme initiale Basislösung

- Raum der zulässigen Lösungen ist beschrieben durch (o.B.d.A.: $b \geqslant 0$): $A \cdot x \leqslant b$ mit $x \geqslant 0$.
- Die Zielfunktion können wir hier ignorieren.
- Wir erzeugen Hilfsvariablen $h_1, h_2, \ldots, h_m$

Bestimme initiale Basislösung

- Raum der zulässigen Lösungen ist beschrieben durch (o.B.d.A.: $b \geqslant 0$): $A \cdot x \leqslant b$ mit $x \geqslant 0$.
- Die Zielfunktion können wir hier ignorieren.
- Wir erzeugen Hilfsvariablen $h_1, h_2, \ldots, h_m$
- und ersetzten die i-te Nebenbedingung $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j \leqslant b_i$ durch

$$\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = b_i.$$

Bestimme initiale Basislösung

- Raum der zulässigen Lösungen ist beschrieben durch (o.B.d.A.: $b \geqslant 0$): $A \cdot x \leqslant b$ mit $x \geqslant 0$.
- Die Zielfunktion können wir hier ignorieren.
- Wir erzeugen Hilfsvariablen $h_1, h_2, \ldots, h_m$
- und ersetzten die i-te Nebenbedingung $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j \leqslant b_i$ durch

$$\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = b_i.$$

- Die neue Zielfunktion ist: minimiere $\sum_{k=1}^{m} h_k$.

Bestimme initiale Basislösung

- Raum der zulässigen Lösungen ist beschrieben durch (o.B.d.A.: $b \geqslant 0$): $A \cdot x \leqslant b$ mit $x \geqslant 0$.
- Die Zielfunktion können wir hier ignorieren.
- Wir erzeugen Hilfsvariablen $h_1, h_2, \ldots, h_m$
- und ersetzten die i-te Nebenbedingung $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j \leqslant b_i$ durch

$$\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = b_i.$$

- Die neue Zielfunktion ist: minimiere $\sum_{k=1}^{m} h_k$.
- Für dieses Hilfs-LP gibt es die Basislösung: $x = 0$.

Bestimme initiale Basislösung

- Raum der zulässigen Lösungen ist beschrieben durch (o.B.d.A.: $b \geqslant 0$): $A \cdot x \leqslant b$ mit $x \geqslant 0$.
- Die Zielfunktion können wir hier ignorieren.
- Wir erzeugen Hilfsvariablen $h_1, h_2, \ldots, h_m$
- und ersetzten die i-te Nebenbedingung $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j \leqslant b_i$ durch

$$\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = b_i.$$

- Die neue Zielfunktion ist: minimiere $\sum_{k=1}^{m} h_k$.
- Für dieses Hilfs-LP gibt es die Basislösung: $x = 0$.
- Damit kann $\sum_{k=1}^{m} h_k$ minimiert werden.

Bestimme initiale Basislösung

- Raum der zulässigen Lösungen ist beschrieben durch (o.B.d.A.: $b \geqslant 0$): $A \cdot x \leqslant b$ mit $x \geqslant 0$.
- Die Zielfunktion können wir hier ignorieren.
- Wir erzeugen Hilfsvariablen $h_1, h_2, \ldots, h_m$
- und ersetzten die i-te Nebenbedingung $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j \leqslant b_i$ durch

$$\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = b_i.$$

- Die neue Zielfunktion ist: minimiere $\sum_{k=1}^{m} h_k$.
- Für dieses Hilfs-LP gibt es die Basislösung: $x = 0$.
- Damit kann $\sum_{k=1}^{m} h_k$ minimiert werden.
- Für die optimale Lösung sind zwei Fälle möglich:

Bestimme initiale Basislösung

- Raum der zulässigen Lösungen ist beschrieben durch (o.B.d.A.: $b \geqslant 0$): $A \cdot x \leqslant b$ mit $x \geqslant 0$.
- Die Zielfunktion können wir hier ignorieren.
- Wir erzeugen Hilfsvariablen $h_1, h_2, \ldots, h_m$
- und ersetzten die i-te Nebenbedingung $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j \leqslant b_i$ durch

$$\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = b_i.$$

- Die neue Zielfunktion ist: minimiere $\sum_{k=1}^{m} h_k$.
- Für dieses Hilfs-LP gibt es die Basislösung: $x = 0$.
- Damit kann $\sum_{k=1}^{m} h_k$ minimiert werden.
- Für die optimale Lösung sind zwei Fälle möglich:
    - $\sum_{k=1}^{m} h_k = 0$: Da dann $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = \sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j = b_i$ gilt, ist diese Basislösung auch für das ursprüngliche LP eine Basislösung.

Bestimme initiale Basislösung

- Raum der zulässigen Lösungen ist beschrieben durch (o.B.d.A.: $b \geqslant 0$): $A \cdot x \leqslant b$ mit $x \geqslant 0$.
- Die Zielfunktion können wir hier ignorieren.
- Wir erzeugen Hilfsvariablen $h_1, h_2, \dots, h_m$
- und ersetzten die i-te Nebenbedingung $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j \leqslant b_i$ durch

$$\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = b_i.$$

- Die neue Zielfunktion ist: minimiere $\sum_{k=1}^{m} h_k$.
- Für dieses Hilfs-LP gibt es die Basislösung: $x = 0$.
- Damit kann $\sum_{k=1}^{m} h_k$ minimiert werden.
- Für die optimale Lösung sind zwei Fälle möglich:
  - $\sum_{k=1}^{m} h_k = 0$: Da dann $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = \sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j = b_i$ gilt, ist diese Basislösung auch für das ursprüngliche LP eine Basislösung.
  - $\sum_{k=1}^{m} h_k > 0$: Es gilt keine Basislösung mit $h_i = 0$ ($i \in \{1, \dots, m\}$) und dann auch keine Basislösung für das ursprüngliche LP.

Bestimme initiale Basislösung

- Raum der zulässigen Lösungen ist beschrieben durch (o.B.d.A.: $b \geqslant 0$): $A \cdot x \leqslant b$ mit $x \geqslant 0$.
- Die Zielfunktion können wir hier ignorieren.
- Wir erzeugen Hilfsvariablen $h_1, h_2, \ldots, h_m$
- und ersetzten die i-te Nebenbedingung $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j \leqslant b_i$ durch

$$\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = b_i.$$

- Die neue Zielfunktion ist: minimiere $\sum_{k=1}^{m} h_k$.
- Für dieses Hilfs-LP gibt es die Basislösung: $x = 0$.
- Damit kann $\sum_{k=1}^{m} h_k$ minimiert werden.
- Für die optimale Lösung sind zwei Fälle möglich:
  - $\sum_{k=1}^{m} h_k = 0$: Da dann $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = \sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j = b_i$ gilt, ist diese Basislösung auch für das ursprüngliche LP eine Basislösung.
  - $\sum_{k=1}^{m} h_k > 0$: Es gilt keine Basislösung mit $h_i = 0$ ($i \in \{1, \ldots, m\}$) und dann auch keine Basislösung für das ursprüngliche LP.

Das Verfahren bisher

- Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.

Das Verfahren bisher

- Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
- Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.

Das Verfahren bisher

- Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
- Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
- Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.

Das Verfahren bisher

- Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
- Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
- Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
  - Ersetze: $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j = b_i$ durch $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = b_i$.

Das Verfahren bisher

- Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
- Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
- Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
  - Ersetze: $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j = b_i$ durch $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = b_i$.
  - Neue Zielfunktion: minimiere $\sum_{k=1}^{m} h_k$.

Das Verfahren bisher

- Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
- Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
- Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
  - Ersetze: $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j = b_i$ durch $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = b_i$.
  - Neue Zielfunktion: minimiere $\sum_{k=1}^{m} h_k$.
  - Starte mit der direkten Basislösung: $x = 0$ und löse rekursiv.

Das Verfahren bisher

- Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
- Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
- Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
  - Ersetze: $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j = b_i$ durch $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = b_i$.
  - Neue Zielfunktion: minimiere $\sum_{k=1}^{m} h_k$.
  - Starte mit der direkten Basislösung: $x = 0$ und löse rekursiv.
  - Falls $\sum_{k=1}^{m} h_k = 0$ gilt, dann sind x_i Werte eine Basislösung.

Das Verfahren bisher

- Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
- Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
- Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
  - Ersetze: $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j = b_i$ durch $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = b_i$.
  - Neue Zielfunktion: minimiere $\sum_{k=1}^{m} h_k$.
  - Starte mit der direkten Basislösung: $x = 0$ und löse rekursiv.
  - Falls $\sum_{k=1}^{m} h_k = 0$ gilt, dann sind x_i Werte eine Basislösung.
  - Falls $\sum_{k=1}^{m} h_k > 0$ gilt, dann ende mit der Meldung "Keine Lösung".

Das Verfahren bisher

- Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
- Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
- Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
  - Ersetze: $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j = b_i$ durch $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = b_i$.
  - Neue Zielfunktion: minimiere $\sum_{k=1}^{m} h_k$.
  - Starte mit der direkten Basislösung: $x = 0$ und löse rekursiv.
  - Falls $\sum_{k=1}^{m} h_k = 0$ gilt, dann sind x_i Werte eine Basislösung.
  - Falls $\sum_{k=1}^{m} h_k > 0$ gilt, dann ende mit der Meldung "Keine Lösung".
- Bestimme Vektor der reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_{\delta}^T \cdot \hat{A}$.

Das Verfahren bisher

- Problem: Maximiere $c'^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
- Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
- Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
  - Ersetze: $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j = b_i$ durch $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = b_i$.
  - Neue Zielfunktion: minimiere $\sum_{k=1}^{m} h_k$.
  - Starte mit der direkten Basislösung: $x = 0$ und löse rekursiv.
  - Falls $\sum_{k=1}^{m} h_k = 0$ gilt, dann sind x_i Werte eine Basislösung.
  - Falls $\sum_{k=1}^{m} h_k > 0$ gilt, dann ende mit der Meldung "Keine Lösung".
- Bestimme Vektor der reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_{\delta}^T \cdot \hat{A}$.
- Solange r einen positiven Eintrag x_j hat, wiederhole:

Das Verfahren bisher

- Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
- Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
- Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
  - Ersetze: $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j = b_i$ durch $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = b_i$.
  - Neue Zielfunktion: minimiere $\sum_{k=1}^{m} h_k$.
  - Starte mit der direkten Basislösung: $x = 0$ und löse rekursiv.
  - Falls $\sum_{k=1}^{m} h_k = 0$ gilt, dann sind x_i Werte eine Basislösung.
  - Falls $\sum_{k=1}^{m} h_k > 0$ gilt, dann ende mit der Meldung "Keine Lösung".
- Bestimme Vektor der reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_{\delta}^T \cdot \hat{A}$.
- Solange r einen positiven Eintrag x_j hat, wiederhole:
  - Falls für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gilt $\hat{a}_{i,j} \leqslant 0$, so

Das Verfahren bisher

- Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
- Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
- Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
  - Ersetze: $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j = b_i$ durch $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = b_i$.
  - Neue Zielfunktion: minimiere $\sum_{k=1}^{m} h_k$.
  - Starte mit der direkten Basislösung: $x = 0$ und löse rekursiv.
  - Falls $\sum_{k=1}^{m} h_k = 0$ gilt, dann sind x_i Werte eine Basislösung.
  - Falls $\sum_{k=1}^{m} h_k > 0$ gilt, dann ende mit der Meldung "Keine Lösung".
- Bestimme Vektor der reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_{\delta}^T \cdot \hat{A}$.
- Solange r einen positiven Eintrag x_j hat, wiederhole:
  - Falls für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gilt $\hat{a}_{i,j} \leqslant 0$, so
    - kann der Wert x_j beliebig erhöht werden. Gebe aus: "die Lösung ist unbeschränkt".

Das Verfahren bisher

- Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
- Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
- Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
  - Ersetze: $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j = b_i$ durch $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = b_i$.
  - Neue Zielfunktion: minimiere $\sum_{k=1}^{m} h_k$.
  - Starte mit der direkten Basislösung: $x = 0$ und löse rekursiv.
  - Falls $\sum_{k=1}^{m} h_k = 0$ gilt, dann sind x_i Werte eine Basislösung.
  - Falls $\sum_{k=1}^{m} h_k > 0$ gilt, dann ende mit der Meldung "Keine Lösung".
- Bestimme Vektor der reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_{\delta}^T \cdot \hat{A}$.
- Solange r einen positiven Eintrag x_j hat, wiederhole:
  - Falls für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gilt $\hat{a}_{i,j} \leqslant 0$, so
    - kann der Wert x_j beliebig erhöht werden. Gebe aus: "die Lösung ist unbeschränkt".
  - Wähle nun aus: $i = \operatorname{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m} \{ \frac{\hat{b}_k}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0 \}$.

Das Verfahren bisher

- Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
- Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
- Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
  - Ersetze: $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j = b_i$ durch $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = b_i$.
  - Neue Zielfunktion: minimiere $\sum_{k=1}^{m} h_k$.
  - Starte mit der direkten Basislösung: $x = 0$ und löse rekursiv.
  - Falls $\sum_{k=1}^{m} h_k = 0$ gilt, dann sind x_i Werte eine Basislösung.
  - Falls $\sum_{k=1}^{m} h_k > 0$ gilt, dann ende mit der Meldung "Keine Lösung".
- Bestimme Vektor der reduzierten Kosten: $r = c_{\overline{\delta}}^T - c_{\delta}^T \cdot \hat{A}$.
- Solange r einen positiven Eintrag x_j hat, wiederhole:
  - Falls für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gilt $\hat{a}_{i,j} \leqslant 0$, so
    - kann der Wert x_j beliebig erhöht werden. Gebe aus: "die Lösung ist unbeschränkt".
  - Wähle nun aus: $i = \mathrm{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m} \{ \frac{\hat{b}_k}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0 \}$.
  - Setze $x_j = \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{i,j}}$ und bestimme dadurch neues x_δ:

Das Verfahren bisher

- Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
- Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
- Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
  - Ersetze: $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j = b_i$ durch $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = b_i$.
  - Neue Zielfunktion: minimiere $\sum_{k=1}^{m} h_k$.
  - Starte mit der direkten Basislösung: $x = 0$ und löse rekursiv.
  - Falls $\sum_{k=1}^{m} h_k = 0$ gilt, dann sind x_i Werte eine Basislösung.
  - Falls $\sum_{k=1}^{m} h_k > 0$ gilt, dann ende mit der Meldung "Keine Lösung".
- Bestimme Vektor der reduzierten Kosten: $r = c_{\overline{\delta}}^T - c_{\delta}^T \cdot \hat{A}$.
- Solange r einen positiven Eintrag x_j hat, wiederhole:
  - Falls für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gilt $\hat{a}_{i,j} \leqslant 0$, so
    - kann der Wert x_j beliebig erhöht werden. Gebe aus: "die Lösung ist unbeschränkt".
  - Wähle nun aus: $i = \text{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m}\{\frac{\hat{b}_k}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0\}$.
  - Setze $x_j = \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{i,j}}$ und bestimme dadurch neues x_δ:
    - Ersetze Spalte $\hat{A}_{\delta(i)}$ durch Spalte $\hat{A}_j$.

Das Verfahren bisher

- Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
- Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
- Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
  - Ersetze: $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j = b_i$ durch $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = b_i$.
  - Neue Zielfunktion: minimiere $\sum_{k=1}^{m} h_k$.
  - Starte mit der direkten Basislösung: $x = 0$ und löse rekursiv.
  - Falls $\sum_{k=1}^{m} h_k = 0$ gilt, dann sind x_i Werte eine Basislösung.
  - Falls $\sum_{k=1}^{m} h_k > 0$ gilt, dann ende mit der Meldung "Keine Lösung".
- Bestimme Vektor der reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_{\delta}^T \cdot \hat{A}$.
- Solange r einen positiven Eintrag x_j hat, wiederhole:
  - Falls für alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ gilt $\hat{a}_{i,j} \leqslant 0$, so
    - kann der Wert x_j beliebig erhöht werden. Gebe aus: "die Lösung ist unbeschränkt".
  - Wähle nun aus: $i = \text{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m} \{ \frac{\hat{b}_k}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0 \}$.
  - Setze $x_j = \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{i,j}}$ und bestimme dadurch neues x_δ:
    - Ersetze Spalte $\hat{A}_{\delta(i)}$ durch Spalte $\hat{A}_j$.
  - Bestimme neu: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_{\delta}^T \cdot \hat{A}$.

Das Verfahren bisher

- Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
- Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
- Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
  - Ersetze: $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j = b_i$ durch $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = b_i$.
  - Neue Zielfunktion: minimiere $\sum_{k=1}^{m} h_k$.
  - Starte mit der direkten Basislösung: $x = 0$ und löse rekursiv.
  - Falls $\sum_{k=1}^{m} h_k = 0$ gilt, dann sind x_i Werte eine Basislösung.
  - Falls $\sum_{k=1}^{m} h_k > 0$ gilt, dann ende mit der Meldung "Keine Lösung".
- Bestimme Vektor der reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$.
- Solange r einen positiven Eintrag x_j hat, wiederhole:
  - Falls für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gilt $\hat{a}_{i,j} \leqslant 0$, so
    - kann der Wert x_j beliebig erhöht werden. Gebe aus: "die Lösung ist unbeschränkt".
  - Wähle nun aus: $i = \operatorname{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m}\{\frac{\hat{b}_k}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0\}$.
  - Setze $x_j = \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{i,j}}$ und bestimme dadurch neues x_δ:
    - Ersetze Spalte $\hat{A}_{\delta(i)}$ durch Spalte $\hat{A}_j$.
  - Bestimme neu: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$.
- Gebe x_δ aus.

Das Verfahren bisher

- Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
- Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
- Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
  - Ersetze: $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j = b_i$ durch $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = b_i$.
  - Neue Zielfunktion: minimiere $\sum_{k=1}^{m} h_k$.
  - Starte mit der direkten Basislösung: $x = 0$ und löse rekursiv.
  - Falls $\sum_{k=1}^{m} h_k = 0$ gilt, dann sind x_i Werte eine Basislösung.
  - Falls $\sum_{k=1}^{m} h_k > 0$ gilt, dann ende mit der Meldung "Keine Lösung".
- Bestimme Vektor der reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_{\delta}^T \cdot \hat{A}$.
- Solange r einen positiven Eintrag x_j hat, wiederhole:
  - Falls für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gilt $\hat{a}_{i,j} \leqslant 0$, so
    - kann der Wert x_j beliebig erhöht werden. Gebe aus: "die Lösung ist unbeschränkt".
  - Wähle nun aus: $i = \operatorname{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m} \{ \frac{\hat{b}_k}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0 \}$.
  - Setze $x_j = \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{i,j}}$ und bestimme dadurch neues x_δ:
    - Ersetze Spalte $\hat{A}_{\delta(i)}$ durch Spalte $\hat{A}_j$.
  - Bestimme neu: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_{\delta}^T \cdot \hat{A}$.
- Gebe x_δ aus.

Einleitung

- Ein Pivotschritt und die zugehörigen Transformationen können mit $O(n \cdot m)$ algebraischen Rechenoperationen durchgeführt werden.

Einleitung

- Ein Pivotschritt und die zugehörigen Transformationen können mit $O(n \cdot m)$ algebraischen Rechenoperationen durchgeführt werden.
- Da die Eingabegröße $\Omega(n \cdot m)$ ist, wäre somit die Laufzeit linear, falls wir algebraischen Rechenoperationen in $O(1)$ durchführen könnten.

Einleitung

- Ein Pivotschritt und die zugehörigen Transformationen können mit $O(n \cdot m)$ algebraischen Rechenoperationen durchgeführt werden.
- Da die Eingabegröße $\Omega(n \cdot m)$ ist, wäre somit die Laufzeit linear, falls wir algebraischen Rechenoperationen in $O(1)$ durchführen könnten.
- Nun wachsen aber die Zahlen während der Schritte.

Einleitung

- Ein Pivotschritt und die zugehörigen Transformationen können mit $O(n \cdot m)$ algebraischen Rechenoperationen durchgeführt werden.
- Da die Eingabegröße $\Omega(n \cdot m)$ ist, wäre somit die Laufzeit linear, falls wir algebraischen Rechenoperationen in $O(1)$ durchführen könnten.
- Nun wachsen aber die Zahlen während der Schritte.
- Damit müssen wir besser abschätzen.

Einleitung

- Ein Pivotschritt und die zugehörigen Transformationen können mit $O(n \cdot m)$ algebraischen Rechenoperationen durchgeführt werden.
- Da die Eingabegröße $\Omega(n \cdot m)$ ist, wäre somit die Laufzeit linear, falls wir algebraischen Rechenoperationen in $O(1)$ durchführen könnten.
- Nun wachsen aber die Zahlen während der Schritte.
- Damit müssen wir besser abschätzen.
- Der Algorithmus stellt daher alle Werte als gekürzten Bruch dar.

Einleitung

- Ein Pivotschritt und die zugehörigen Transformationen können mit $O(n \cdot m)$ algebraischen Rechenoperationen durchgeführt werden.
- Da die Eingabegröße $\Omega(n \cdot m)$ ist, wäre somit die Laufzeit linear, falls wir algebraischen Rechenoperationen in $O(1)$ durchführen könnten.
- Nun wachsen aber die Zahlen während der Schritte.
- Damit müssen wir besser abschätzen.
- Der Algorithmus stellt daher alle Werte als gekürzten Bruch dar.
- Nenner und Zähler werden binär kodiert.

Einleitung

- Ein Pivotschritt und die zugehörigen Transformationen können mit $O(n \cdot m)$ algebraischen Rechenoperationen durchgeführt werden.
- Da die Eingabegröße $\Omega(n \cdot m)$ ist, wäre somit die Laufzeit linear, falls wir algebraischen Rechenoperationen in $O(1)$ durchführen könnten.
- Nun wachsen aber die Zahlen während der Schritte.
- Damit müssen wir besser abschätzen.
- Der Algorithmus stellt daher alle Werte als gekürzten Bruch dar.
- Nenner und Zähler werden binär kodiert.
- Wir können davon ausgehen, dass die Zahlen aus der Eingabe ganze Zahlen sind.

Einleitung

- Ein Pivotschritt und die zugehörigen Transformationen können mit $O(n \cdot m)$ algebraischen Rechenoperationen durchgeführt werden.
- Da die Eingabegröße $\Omega(n \cdot m)$ ist, wäre somit die Laufzeit linear, falls wir algebraischen Rechenoperationen in $O(1)$ durchführen könnten.
- Nun wachsen aber die Zahlen während der Schritte.
- Damit müssen wir besser abschätzen.
- Der Algorithmus stellt daher alle Werte als gekürzten Bruch dar.
- Nenner und Zähler werden binär kodiert.
- Wir können davon ausgehen, dass die Zahlen aus der Eingabe ganze Zahlen sind.

Zahlendarstellung

Lemma

Sei α der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen des LPs in Gleichungsform.

Beweisüberblick:

Zahlendarstellung

Lemma

Sei α der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen des LPs in Gleichungsform.

1. *Sei β der größte absolute Wert über alle Nenner und Zähler aus den Matrizen $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, $A' = A_\delta^{-1}$ und dem Vektor $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$. Dann gilt: $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.*

Beweisüberblick:

Zahlendarstellung

Lemma

Sei α der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen des LPs in Gleichungsform.

1. *Sei β der größte absolute Wert über alle Nenner und Zähler aus den Matrizen $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, $A' = A_\delta^{-1}$ und dem Vektor $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$. Dann gilt: $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.*
2. *Sei γ der größte absolute Wert über alle Nenner und Zähler der Zielfunktionswerte $c^T x$ über alle Basislösungen x. Dann gilt: $\gamma \leqslant (\alpha \cdot m)^{m+1}$.*

Beweisüberblick:

Zahlendarstellung

Lemma

Sei α der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen des LPs in Gleichungsform.

1. *Sei β der größte absolute Wert über alle Nenner und Zähler aus den Matrizen $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, $A' = A_\delta^{-1}$ und dem Vektor $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$. Dann gilt: $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.*
2. *Sei γ der größte absolute Wert über alle Nenner und Zähler der Zielfunktionswerte $c^T x$ über alle Basislösungen x. Dann gilt: $\gamma \leqslant (\alpha \cdot m)^{m+1}$.*

Beweisüberblick:

Zahlendarstellung

Lemma

Sei α der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen des LPs in Gleichungsform.

1. *Sei β der größte absolute Wert über alle Nenner und Zähler aus den Matrizen $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, $A' = A_\delta^{-1}$ und dem Vektor $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$. Dann gilt: $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.*
2. *Sei γ der größte absolute Wert über alle Nenner und Zähler der Zielfunktionswerte $c^T x$ über alle Basislösungen x. Dann gilt: $\gamma \leqslant (\alpha \cdot m)^{m+1}$.*

Beweisüberblick:

- Nutze die Cramersche Regel.

Zahlendarstellung

Lemma

Sei α der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen des LPs in Gleichungsform.

1. *Sei β der größte absolute Wert über alle Nenner und Zähler aus den Matrizen $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, $A' = A_\delta^{-1}$ und dem Vektor $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$. Dann gilt: $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.*
2. *Sei γ der größte absolute Wert über alle Nenner und Zähler der Zielfunktionswerte $c^T x$ über alle Basislösungen x. Dann gilt: $\gamma \leqslant (\alpha \cdot m)^{m+1}$.*

Beweisüberblick:

- Nutze die Cramersche Regel.
- Schätze damit die Größe der Elemente ab.

Zahlendarstellung

Lemma

Sei α der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen des LPs in Gleichungsform.

1. *Sei β der größte absolute Wert über alle Nenner und Zähler aus den Matrizen $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, $A' = A_\delta^{-1}$ und dem Vektor $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$. Dann gilt: $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.*
2. *Sei γ der größte absolute Wert über alle Nenner und Zähler der Zielfunktionswerte $c^T x$ über alle Basislösungen x. Dann gilt: $\gamma \leqslant (\alpha \cdot m)^{m+1}$.*

Beweisüberblick:

- Nutze die Cramersche Regel.
- Schätze damit die Größe der Elemente ab.
- Nutze dann diese Abschätzung zum Beweis.

Zahlendarstellung

Lemma

Sei α der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen des LPs in Gleichungsform.

1. *Sei β der größte absolute Wert über alle Nenner und Zähler aus den Matrizen $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, $A' = A_\delta^{-1}$ und dem Vektor $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$. Dann gilt: $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.*
2. *Sei γ der größte absolute Wert über alle Nenner und Zähler der Zielfunktionswerte $c^T x$ über alle Basislösungen x. Dann gilt: $\gamma \leqslant (\alpha \cdot m)^{m+1}$.*

Beweisüberblick:

- Nutze die Cramersche Regel.
- Schätze damit die Größe der Elemente ab.
- Nutze dann diese Abschätzung zum Beweis.

Cramersche Regel

Theorem (Cramersche Regel)

Sei M eine invertierbare $k \times k$-Matrix, und sei b ein k-Vektor. Sodann bezeichne M_i die i-te Spalte von M. Sei weiter x die eindeutige Lösung von $M \cdot x = b$, d.h. $x = M^{-1} \cdot b$. Dann gilt:

$$x_i = \frac{\det(M_1, \ldots, M_{i-1}, b, M_{i+1} \ldots, M_k)}{\det(M)}.$$

Cramersche Regel

Theorem (Cramersche Regel)

Sei M eine invertierbare $k \times k$-Matrix, und sei b ein k-Vektor. Sodann bezeichne M_i die i-te Spalte von M. Sei weiter x die eindeutige Lösung von $M \cdot x = b$, d.h. $x = M^{-1} \cdot b$. Dann gilt:

$$x_i = \frac{\det(M_1, \ldots, M_{i-1}, b, M_{i+1} \ldots, M_k)}{\det(M)}.$$

Cramersche Regel

Theorem (Cramersche Regel)

Sei M eine invertierbare $k \times k$-Matrix, und sei b ein k-Vektor. Sodann bezeichne M_i die i-te Spalte von M. Sei weiter x die eindeutige Lösung von $M \cdot x = b$, d.h. $x = M^{-1} \cdot b$. Dann gilt:

$$x_i = \frac{\det(M_1, \ldots, M_{i-1}, b, M_{i+1} \ldots, M_k)}{\det(M)}.$$

Lemma

Sei α der größte absolute Wert aus M. Es gilt: $|x_i| \leqslant (\alpha \cdot k)^k$.

Beweis:

Cramersche Regel

Theorem (Cramersche Regel)

Sei M eine invertierbare $k \times k$-Matrix, und sei b ein k-Vektor. Sodann bezeichne M_i die i-te Spalte von M. Sei weiter x die eindeutige Lösung von $M \cdot x = b$, d.h. $x = M^{-1} \cdot b$. Dann gilt:

$$x_i = \frac{\det(M_1, \ldots, M_{i-1}, b, M_{i+1} \ldots, M_k)}{\det(M)}.$$

Lemma

Sei α der größte absolute Wert aus M. Es gilt: $|x_i| \leqslant (\alpha \cdot k)^k$.

Beweis:

Cramersche Regel

Theorem (Cramersche Regel)

Sei M eine invertierbare $k \times k$-Matrix, und sei b ein k-Vektor. Sodann bezeichne M_i die i-te Spalte von M. Sei weiter x die eindeutige Lösung von $M \cdot x = b$, d.h. $x = M^{-1} \cdot b$. Dann gilt:

$$x_i = \frac{\det(M_1, \ldots, M_{i-1}, b, M_{i+1} \ldots, M_k)}{\det(M)}.$$

Lemma

Sei α der größte absolute Wert aus M. Es gilt: $|x_i| \leqslant (\alpha \cdot k)^k$.

Beweis:

- Determinante besteht aus Summe von $k!$ vielen Produkten von k Matrixeinträgen.

Cramersche Regel

Theorem (Cramersche Regel)

Sei M eine invertierbare $k \times k$-Matrix, und sei b ein k-Vektor. Sodann bezeichne M_i die i-te Spalte von M. Sei weiter x die eindeutige Lösung von $M \cdot x = b$, d.h. $x = M^{-1} \cdot b$. Dann gilt:

$$x_i = \frac{\det(M_1, \ldots, M_{i-1}, b, M_{i+1} \ldots, M_k)}{\det(M)}.$$

Lemma

Sei α der größte absolute Wert aus M. Es gilt: $|x_i| \leqslant (\alpha \cdot k)^k$.

Beweis:

- Determinante besteht aus Summe von $k!$ vielen Produkten von k Matrixeinträgen.
- Damit gilt: $|x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$.

Cramersche Regel

Theorem (Cramersche Regel)

Sei M eine invertierbare $k \times k$-Matrix, und sei b ein k-Vektor. Sodann bezeichne M_i die i-te Spalte von M. Sei weiter x die eindeutige Lösung von $M \cdot x = b$, d.h. $x = M^{-1} \cdot b$. Dann gilt:

$$x_i = \frac{\det(M_1, \ldots, M_{i-1}, b, M_{i+1} \ldots, M_k)}{\det(M)}.$$

Lemma

Sei α der größte absolute Wert aus M. Es gilt: $|x_i| \leqslant (\alpha \cdot k)^k$.

Beweis:

- Determinante besteht aus Summe von $k!$ vielen Produkten von k Matrixeinträgen.
- Damit gilt: $|x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$.

Beweis (Abschätzungen) und Theorem

$x = M^{-1} \cdot b$, $|x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$

- Zeige: $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.

Beweis (Abschätzungen) und Theorem

$x = M^{-1} \cdot b$, $|x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$

- Zeige: $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.
  - Werte aus: $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, $A' = A_\delta^{-1}$ und dem Vektor $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$.

Beweis (Abschätzungen) und Theorem

$x = M^{-1} \cdot b,\ |x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$

- Zeige: $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.
  - Werte aus: $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, $A' = A_\delta^{-1}$ und dem Vektor $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$.
  - Auf $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$ kann obiges Lemma direkt angewendet werden.

Beweis (Abschätzungen) und Theorem

$x = M^{-1} \cdot b$, $|x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$

- Zeige: $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.
  - Werte aus: $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, $A' = A_\delta^{-1}$ und dem Vektor $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$.
  - Auf $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$ kann obiges Lemma direkt angewendet werden.
  - Auf $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$ kann das Lemma auf die Zeilen von $\hat{A}$ und passenden Spalten von A angewendet werden.

Beweis (Abschätzungen) und Theorem

$x = M^{-1} \cdot b,\ |x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$

- Zeige: $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.
  - Werte aus: $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, $A' = A_\delta^{-1}$ und dem Vektor $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$.
  - Auf $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$ kann obiges Lemma direkt angewendet werden.
  - Auf $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$ kann das Lemma auf die Zeilen von $\hat{A}$ und passenden Spalten von A angewendet werden.
  - Analoge Anwendung für $A' = A_\delta^{-1} \cdot E_m$ liefert die Behauptung.

Beweis (Abschätzungen) und Theorem

$x = M^{-1} \cdot b,\ |x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$

- Zeige: $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.
  - Werte aus: $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, $A' = A_\delta^{-1}$ und dem Vektor $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$.
  - Auf $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$ kann obiges Lemma direkt angewendet werden.
  - Auf $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$ kann das Lemma auf die Zeilen von $\hat{A}$ und passenden Spalten von A angewendet werden.
  - Analoge Anwendung für $A' = A_\delta^{-1} \cdot E_m$ liefert die Behauptung.
- Zeige: $\gamma \leqslant (\alpha \cdot m)^{m+1}$.

Beweis (Abschätzungen) und Theorem

$x = M^{-1} \cdot b$, $|x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$

- Zeige: $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.
  - Werte aus: $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, $A' = A_\delta^{-1}$ und dem Vektor $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$.
  - Auf $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$ kann obiges Lemma direkt angewendet werden.
  - Auf $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$ kann das Lemma auf die Zeilen von $\hat{A}$ und passenden Spalten von A angewendet werden.
  - Analoge Anwendung für $A' = A_\delta^{-1} \cdot E_m$ liefert die Behauptung.
- Zeige: $\gamma \leqslant (\alpha \cdot m)^{m+1}$.
  - Werte aus: $c^T x$.

Beweis (Abschätzungen) und Theorem

$x = M^{-1} \cdot b$, $|x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$

- Zeige: $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.
  - Werte aus: $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, $A' = A_\delta^{-1}$ und dem Vektor $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$.
  - Auf $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$ kann obiges Lemma direkt angewendet werden.
  - Auf $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$ kann das Lemma auf die Zeilen von $\hat{A}$ und passenden Spalten von A angewendet werden.
  - Analoge Anwendung für $A' = A_\delta^{-1} \cdot E_m$ liefert die Behauptung.
- Zeige: $\gamma \leqslant (\alpha \cdot m)^{m+1}$.
  - Werte aus: $c^T x$.
    - Die Werte in x sind durch β beschränkt.

Beweis (Abschätzungen) und Theorem

$x = M^{-1} \cdot b$, $|x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$

- Zeige: $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.
  - Werte aus: $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, $A' = A_\delta^{-1}$ und dem Vektor $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$.
  - Auf $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$ kann obiges Lemma direkt angewendet werden.
  - Auf $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$ kann das Lemma auf die Zeilen von $\hat{A}$ und passenden Spalten von A angewendet werden.
  - Analoge Anwendung für $A' = A_\delta^{-1} \cdot E_m$ liefert die Behauptung.
- Zeige: $\gamma \leqslant (\alpha \cdot m)^{m+1}$.
  - Werte aus: $c^T x$.
    - Die Werte in x sind durch β beschränkt.
    - Die Werte in c sind durch α beschränkt.

Beweis (Abschätzungen) und Theorem

$x = M^{-1} \cdot b$, $|x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$

- Zeige: $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.
  - Werte aus: $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, $A' = A_\delta^{-1}$ und dem Vektor $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$.
  - Auf $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$ kann obiges Lemma direkt angewendet werden.
  - Auf $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$ kann das Lemma auf die Zeilen von $\hat{A}$ und passenden Spalten von A angewendet werden.
  - Analoge Anwendung für $A' = A_\delta^{-1} \cdot E_m$ liefert die Behauptung.
- Zeige: $\gamma \leqslant (\alpha \cdot m)^{m+1}$.
  - Werte aus: $c^T x$.
    - Die Werte in x sind durch β beschränkt.
    - Die Werte in c sind durch α beschränkt.
    - In $c^T x$ sind damit die Nenner durch $\leqslant (\alpha \cdot m)^m$ beschränkt,

Beweis (Abschätzungen) und Theorem

$x = M^{-1} \cdot b$, $|x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$

- Zeige: $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.
  - Werte aus: $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, $A' = A_\delta^{-1}$ und dem Vektor $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$.
  - Auf $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$ kann obiges Lemma direkt angewendet werden.
  - Auf $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$ kann das Lemma auf die Zeilen von $\hat{A}$ und passenden Spalten von A angewendet werden.
  - Analoge Anwendung für $A' = A_\delta^{-1} \cdot E_m$ liefert die Behauptung.
- Zeige: $\gamma \leqslant (\alpha \cdot m)^{m+1}$.
  - Werte aus: $c^T x$.
    - Die Werte in x sind durch β beschränkt.
    - Die Werte in c sind durch α beschränkt.
    - In $c^T x$ sind damit die Nenner durch $\leqslant (\alpha \cdot m)^m$ beschränkt,
    - und die Zähler durch $(\alpha \cdot m)^{m+1}$.

Beweis (Abschätzungen) und Theorem

$x = M^{-1} \cdot b,\ |x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$

- Zeige: $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.
  - Werte aus: $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, $A' = A_\delta^{-1}$ und dem Vektor $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$.
  - Auf $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$ kann obiges Lemma direkt angewendet werden.
  - Auf $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$ kann das Lemma auf die Zeilen von $\hat{A}$ und passenden Spalten von A angewendet werden.
  - Analoge Anwendung für $A' = A_\delta^{-1} \cdot E_m$ liefert die Behauptung.
- Zeige: $\gamma \leqslant (\alpha \cdot m)^{m+1}$.
  - Werte aus: $c^T x$.
    - Die Werte in x sind durch β beschränkt.
    - Die Werte in c sind durch α beschränkt.
    - In $c^T x$ sind damit die Nenner durch $\leqslant (\alpha \cdot m)^m$ beschränkt,
    - und die Zähler durch $(\alpha \cdot m)^{m+1}$.

Beweis (Abschätzungen) und Theorem

$x = M^{-1} \cdot b,\ |x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$

- Zeige: $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.
  - Werte aus: $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, $A' = A_\delta^{-1}$ und dem Vektor $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$.
  - Auf $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$ kann obiges Lemma direkt angewendet werden.
  - Auf $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$ kann das Lemma auf die Zeilen von $\hat{A}$ und passenden Spalten von A angewendet werden.
  - Analoge Anwendung für $A' = A_\delta^{-1} \cdot E_m$ liefert die Behauptung.
- Zeige: $\gamma \leqslant (\alpha \cdot m)^{m+1}$.
  - Werte aus: $c^T x$.
    - Die Werte in x sind durch β beschränkt.
    - Die Werte in c sind durch α beschränkt.
    - In $c^T x$ sind damit die Nenner durch $\leqslant (\alpha \cdot m)^m$ beschränkt,
    - und die Zähler durch $(\alpha \cdot m)^{m+1}$.

Laufzeit eines Pivotschrittes

$x = M^{-1} \cdot b, \; |x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$

Theorem

Die Laufzeit eines Pivotschrittes ist polynomiell beschränkt in der Eingabelänge.

Beweis:

Laufzeit eines Pivotschrittes

$x = M^{-1} \cdot b$, $|x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$

Theorem

Die Laufzeit eines Pivotschrittes ist polynomiell beschränkt in der Eingabelänge.

Beweis:

Laufzeit eines Pivotschrittes

$x = M^{-1} \cdot b$, $|x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$

Theorem

Die Laufzeit eines Pivotschrittes ist polynomiell beschränkt in der Eingabelänge.

Beweis:

- Die Laufzeit ergibt sich nicht durch die absoluten Werte in den Brüchen,

Laufzeit eines Pivotschrittes

$x = M^{-1} \cdot b$, $|x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$

Theorem

Die Laufzeit eines Pivotschrittes ist polynomiell beschränkt in der Eingabelänge.

Beweis:

- Die Laufzeit ergibt sich nicht durch die absoluten Werte in den Brüchen,
- sondern durch die Größe in der Darstellung dieser Zahlen.

Laufzeit eines Pivotschrittes

$x = M^{-1} \cdot b,\ |x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$

Theorem

Die Laufzeit eines Pivotschrittes ist polynomiell beschränkt in der Eingabelänge.

Beweis:

- Die Laufzeit ergibt sich nicht durch die absoluten Werte in den Brüchen,
- sondern durch die Größe in der Darstellung dieser Zahlen.
- Sei l die maximale Länge der Darstellung der Zahlen aus der Eingabe.

Laufzeit eines Pivotschrittes

$x = M^{-1} \cdot b$, $|x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$

Theorem

Die Laufzeit eines Pivotschrittes ist polynomiell beschränkt in der Eingabelänge.

Beweis:

- Die Laufzeit ergibt sich nicht durch die absoluten Werte in den Brüchen,
- sondern durch die Größe in der Darstellung dieser Zahlen.
- Sei l die maximale Länge der Darstellung der Zahlen aus der Eingabe.
- Dann gilt: $l = \Theta(\log \alpha)$.

Laufzeit eines Pivotschrittes

$x = M^{-1} \cdot b$, $|x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$

Theorem

Die Laufzeit eines Pivotschrittes ist polynomiell beschränkt in der Eingabelänge.

Beweis:

- Die Laufzeit ergibt sich nicht durch die absoluten Werte in den Brüchen,
- sondern durch die Größe in der Darstellung dieser Zahlen.
- Sei l die maximale Länge der Darstellung der Zahlen aus der Eingabe.
- Dann gilt: $l = \Theta(\log \alpha)$.
- Die in der Rechnung auftretenden Zahlen sind dann wie folgt beschränkt:

Laufzeit eines Pivotschrittes

$x = M^{-1} \cdot b$, $|x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$

Theorem

Die Laufzeit eines Pivotschrittes ist polynomiell beschränkt in der Eingabelänge.

Beweis:

- Die Laufzeit ergibt sich nicht durch die absoluten Werte in den Brüchen,
- sondern durch die Größe in der Darstellung dieser Zahlen.
- Sei l die maximale Länge der Darstellung der Zahlen aus der Eingabe.
- Dann gilt: $l = \Theta(\log \alpha)$.
- Die in der Rechnung auftretenden Zahlen sind dann wie folgt beschränkt:
  - $l' = O(\log((\alpha \cdot m)^{m+1})) = O(m \cdot (\log m + \log \alpha)) = O(m \cdot \log m + m \cdot l)$.

Laufzeit eines Pivotschrittes

$x = M^{-1} \cdot b$, $|x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$

Theorem

Die Laufzeit eines Pivotschrittes ist polynomiell beschränkt in der Eingabelänge.

Beweis:

- Die Laufzeit ergibt sich nicht durch die absoluten Werte in den Brüchen,
- sondern durch die Größe in der Darstellung dieser Zahlen.
- Sei l die maximale Länge der Darstellung der Zahlen aus der Eingabe.
- Dann gilt: $l = \Theta(\log \alpha)$.
- Die in der Rechnung auftretenden Zahlen sind dann wie folgt beschränkt:
  - $l' = O(\log((\alpha \cdot m)^{m+1})) = O(m \cdot (\log m + \log \alpha)) = O(m \cdot \log m + m \cdot l)$.
- Das sind insgesamt $O(n \cdot m)$ Rechenoperationen auf Werten der Größe $O(m \cdot \log m + m \cdot l)$.

Laufzeit eines Pivotschrittes

$x = M^{-1} \cdot b$, $|x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$

Theorem

Die Laufzeit eines Pivotschrittes ist polynomiell beschränkt in der Eingabelänge.

Beweis:

- Die Laufzeit ergibt sich nicht durch die absoluten Werte in den Brüchen,
- sondern durch die Größe in der Darstellung dieser Zahlen.
- Sei l die maximale Länge der Darstellung der Zahlen aus der Eingabe.
- Dann gilt: $l = \Theta(\log \alpha)$.
- Die in der Rechnung auftretenden Zahlen sind dann wie folgt beschränkt:
  - $l' = O(\log((\alpha \cdot m)^{m+1})) = O(m \cdot (\log m + \log \alpha)) = O(m \cdot \log m + m \cdot l)$.
- Das sind insgesamt $O(n \cdot m)$ Rechenoperationen auf Werten der Größe $O(m \cdot \log m + m \cdot l)$.

Aussage

Theorem

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein LP in kanonischer Form mit n Variablen und $2 \cdot n$ Koeffizienten aus $\{-4, -3, \ldots, 3, 4\}$, so das die Simplexmethode $2^n - 1$ viele Pivotschritte benötigt.

Beweisidee:

Aussage

Theorem

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein LP in kanonischer Form mit n Variablen und $2 \cdot n$ Koeffizienten aus $\{-4, -3, \ldots, 3, 4\}$, so das die Simplexmethode $2^n - 1$ viele Pivotschritte benötigt.

Beweisidee:

Aussage

Theorem

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein LP in kanonischer Form mit n Variablen und $2 \cdot n$ Koeffizienten aus $\{-4, -3, \ldots, 3, 4\}$, so das die Simplexmethode $2^n - 1$ viele Pivotschritte benötigt.

Beweisidee:

- Grundmuster des LPs:

Aussage

Theorem

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein LP in kanonischer Form mit n Variablen und $2 \cdot n$ Koeffizienten aus $\{-4, -3, \ldots, 3, 4\}$, so das die Simplexmethode $2^n - 1$ viele Pivotschritte benötigt.

Beweisidee:

- Grundmuster des LPs:
  - Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Aussage

Theorem

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein LP in kanonischer Form mit n Variablen und $2 \cdot n$ Koeffizienten aus $\{-4, -3, \ldots, 3, 4\}$, so das die Simplexmethode $2^n - 1$ viele Pivotschritte benötigt.

Beweisidee:

- Grundmuster des LPs:
  - Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
  - Zielfunktion: Maximiere x_n.

Aussage

Theorem

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein LP in kanonischer Form mit n Variablen und $2 \cdot n$ Koeffizienten aus $\{-4, -3, \ldots, 3, 4\}$, so das die Simplexmethode $2^n - 1$ viele Pivotschritte benötigt.

Beweisidee:

- Grundmuster des LPs:
  - Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
  - Zielfunktion: Maximiere x_n.
  - Nebenbedingungen: $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Aussage

Theorem

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein LP in kanonischer Form mit n Variablen und $2 \cdot n$ Koeffizienten aus $\{-4, -3, \ldots, 3, 4\}$, so das die Simplexmethode $2^n - 1$ viele Pivotschritte benötigt.

Beweisidee:

- Grundmuster des LPs:
  - Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
  - Zielfunktion: Maximiere x_n.
  - Nebenbedingungen: $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Das entspricht dem n- dimensionalen Hypercube.

Aussage

Theorem

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein LP in kanonischer Form mit n Variablen und $2 \cdot n$ Koeffizienten aus $\{-4, -3, \ldots, 3, 4\}$, so das die Simplexmethode $2^n - 1$ viele Pivotschritte benötigt.

Beweisidee:

- Grundmuster des LPs:
  - Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
  - Zielfunktion: Maximiere x_n.
  - Nebenbedingungen: $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Das entspricht dem n- dimensionalen Hypercube.
- Die Basislösungen sind aus $\{0, 1\}^n$.

Aussage

Theorem

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein LP in kanonischer Form mit n Variablen und $2 \cdot n$ Koeffizienten aus $\{-4, -3, \ldots, 3, 4\}$, so das die Simplexmethode $2^n - 1$ viele Pivotschritte benötigt.

Beweisidee:

- Grundmuster des LPs:
  - Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
  - Zielfunktion: Maximiere x_n.
  - Nebenbedingungen: $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Das entspricht dem n- dimensionalen Hypercube.
- Die Basislösungen sind aus $\{0, 1\}^n$.
- Zum Beweis verformen wir diesen Hypercube.

Aussage

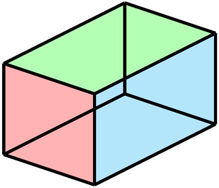
Theorem

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein LP in kanonischer Form mit n Variablen und $2 \cdot n$ Koeffizienten aus $\{-4, -3, \ldots, 3, 4\}$, so das die Simplexmethode $2^n - 1$ viele Pivotschritte benötigt.

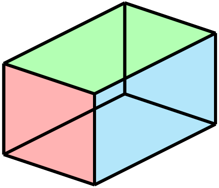
Beweisidee:

- Grundmuster des LPs:
  - Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
  - Zielfunktion: Maximiere x_n.
  - Nebenbedingungen: $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Das entspricht dem n- dimensionalen Hypercube.
- Die Basislösungen sind aus $\{0, 1\}^n$.
- Zum Beweis verformen wir diesen Hypercube.

Hypercube

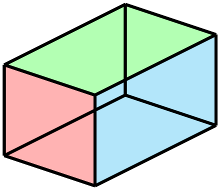


Hypercube



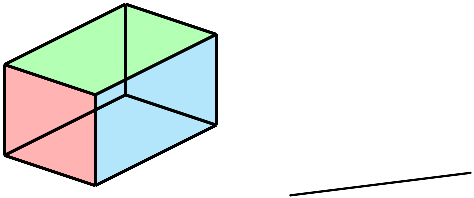
- Formale Definition des Hypercube-Graphen der Dimension d:

Hypercube



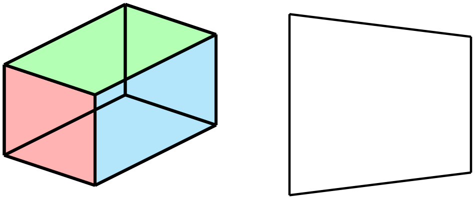
- Formale Definition des Hypercube-Graphen der Dimension d:
- $V = \{0,1\}^n$ und $E = \{\{w0w', w1w'\} \mid \{w0w'\} \in \{0,1\}^n\}$.

Hypercube



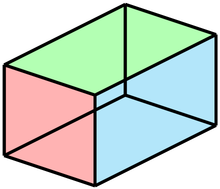
- Formale Definition des Hypercube-Graphen der Dimension d:
- $V = \{0,1\}^n$ und $E = \{\{w0w', w1w'\} \mid \{w0w'\} \in \{0,1\}^n\}$.
- Ein Hypercube enthält einen Hamiltonkreis (Gray-Code).

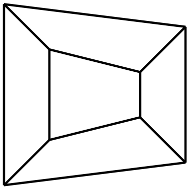
Hypercube



- Formale Definition des Hypercube-Graphen der Dimension d:
- $V = \{0,1\}^n$ und $E = \{\{w0w', w1w'\} \mid \{w0w'\} \in \{0,1\}^n\}$.
- Ein Hypercube enthält einen Hamiltonkreis (Gray-Code).

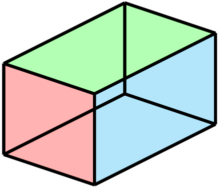
Hypercube

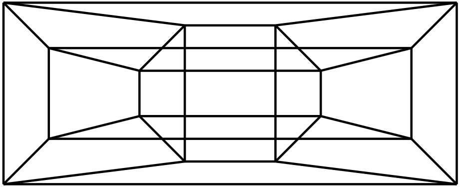




- Formale Definition des Hypercube-Graphen der Dimension d:
- $V = \{0,1\}^n$ und $E = \{\{w0w', w1w'\} \mid \{w0w'\} \in \{0,1\}^n\}$.
- Ein Hypercube enthält einen Hamiltonkreis (Gray-Code).

Hypercube

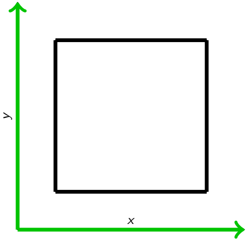




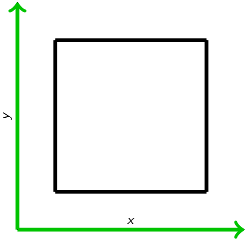
- Formale Definition des Hypercube-Graphen der Dimension d:
- $V = \{0,1\}^n$ und $E = \{\{w0w', w1w'\} \mid \{w0w'\} \in \{0,1\}^n\}$.
- Ein Hypercube enthält einen Hamiltonkreis (Gray-Code).

Idee (Schiefer Hypercube)

Ziel: Maximiere y



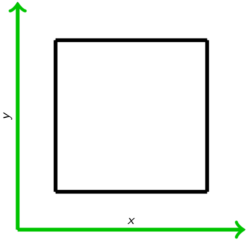
$$\begin{aligned} 0 &\leqslant x \leqslant 1 \\ 0 &\leqslant y \leqslant 1 \end{aligned}$$



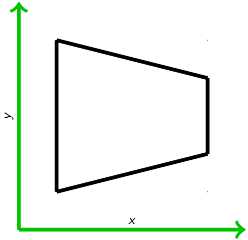
$$0 \leqslant x \leqslant 1$$

Idee (Schiefer Hypercube)

Ziel: Maximiere y



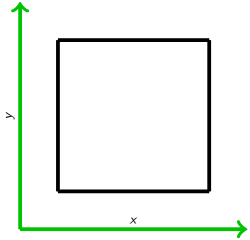
$$\begin{aligned} 0 &\leqslant x \leqslant 1 \\ 0 &\leqslant y \leqslant 1 \end{aligned}$$



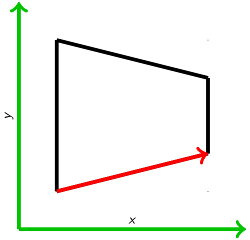
$$\begin{aligned} 0 &\leqslant x \leqslant 1 \\ \varepsilon \cdot x &\leqslant y \leqslant 1 - \varepsilon \cdot x \end{aligned}$$

Idee (Schiefer Hypercube)

Ziel: Maximiere y



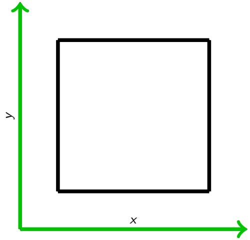
$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant x \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant y \leqslant & 1 \end{array}$$



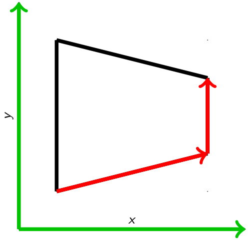
$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant x \leqslant & 1 \\ \varepsilon \cdot x & \leqslant y \leqslant & 1 - \varepsilon \cdot x \end{array}$$

Idee (Schiefer Hypercube)

Ziel: Maximiere y



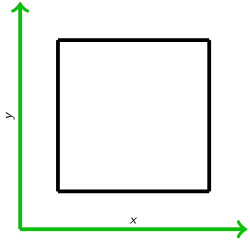
$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant x \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant y \leqslant & 1 \end{array}$$



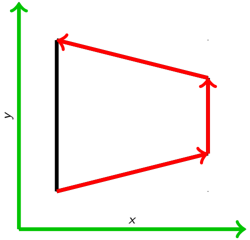
$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant x \leqslant & 1 \\ \varepsilon \cdot x & \leqslant y \leqslant & 1 - \varepsilon \cdot x \end{array}$$

Idee (Schiefer Hypercube)

Ziel: Maximiere y



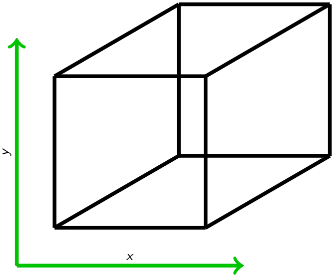
$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant x \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant y \leqslant & 1 \end{array}$$



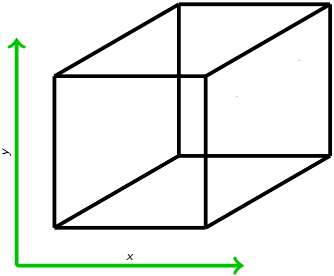
$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant x \leqslant & 1 \\ \varepsilon \cdot x & \leqslant y \leqslant & 1 - \varepsilon \cdot x \end{array}$$

Idee (Schiefer Hypercube in 3 Dimensionen)

Ziel: Maximiere z



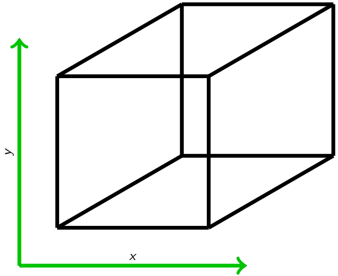
$$
\begin{array}{rcl}
0 & \leqslant x \leqslant & 1\\
0 & \leqslant y \leqslant & 1\\
0 & \leqslant z \leqslant & 1
\end{array}
$$



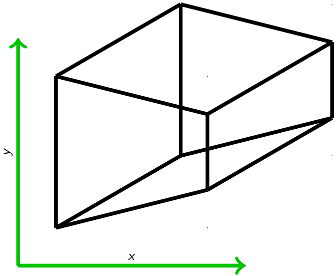
$$0 \leqslant x \leqslant 1$$

Idee (Schiefer Hypercube in 3 Dimensionen)

Ziel: Maximiere z



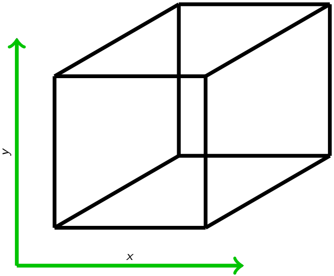
$$\begin{array}{rcccl} 0 & \leqslant & x & \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant & z & \leqslant & 1 \end{array}$$



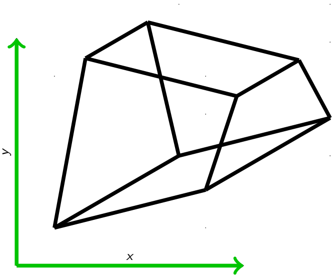
$$\begin{array}{rcccl} 0 & \leqslant & x & \leqslant & 1 \\ \varepsilon \cdot x & \leqslant & y & \leqslant & 1 - \varepsilon \cdot x \end{array}$$

Idee (Schiefer Hypercube in 3 Dimensionen)

Ziel: Maximiere z



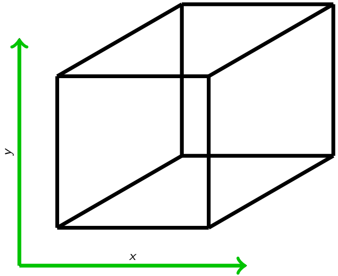
$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant x \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant y \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant z \leqslant & 1 \end{array}$$



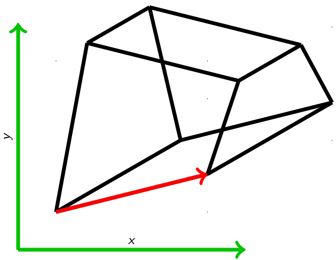
$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant x \leqslant & 1 \\ \varepsilon \cdot x & \leqslant y \leqslant & 1 - \varepsilon \cdot x \\ \varepsilon \cdot y & \leqslant z \leqslant & 1 - \varepsilon \cdot y \end{array}$$

Idee (Schiefer Hypercube in 3 Dimensionen)

Ziel: Maximiere z



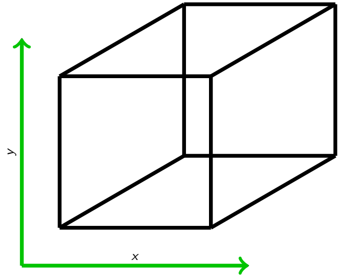
$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant x \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant y \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant z \leqslant & 1 \end{array}$$



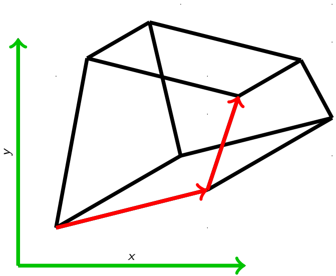
$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant x \leqslant & 1 \\ \varepsilon \cdot x & \leqslant y \leqslant & 1 - \varepsilon \cdot x \\ \varepsilon \cdot y & \leqslant z \leqslant & 1 - \varepsilon \cdot y \end{array}$$

Idee (Schiefer Hypercube in 3 Dimensionen)

Ziel: Maximiere z



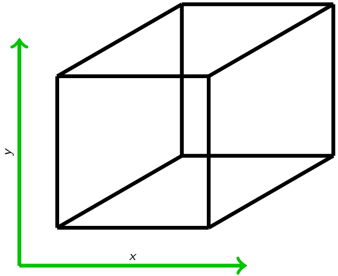
$$\begin{array}{rcccl} 0 & \leqslant & x & \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant & z & \leqslant & 1 \end{array}$$



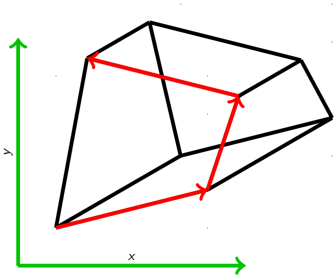
$$\begin{array}{rcccl} 0 & \leqslant & x & \leqslant & 1 \\ \varepsilon \cdot x & \leqslant & y & \leqslant & 1 - \varepsilon \cdot x \\ \varepsilon \cdot y & \leqslant & z & \leqslant & 1 - \varepsilon \cdot y \end{array}$$

Idee (Schiefer Hypercube in 3 Dimensionen)

Ziel: Maximiere z



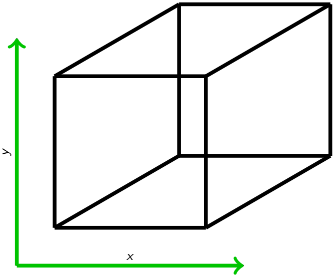
$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant x \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant y \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant z \leqslant & 1 \end{array}$$



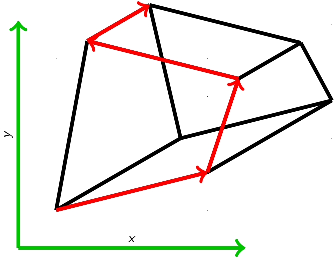
$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant x \leqslant & 1 \\ \varepsilon \cdot x & \leqslant y \leqslant & 1 - \varepsilon \cdot x \\ \varepsilon \cdot y & \leqslant z \leqslant & 1 - \varepsilon \cdot y \end{array}$$

Idee (Schiefer Hypercube in 3 Dimensionen)

Ziel: Maximiere z



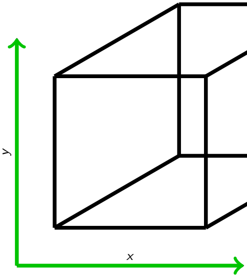
$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant x \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant y \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant z \leqslant & 1 \end{array}$$



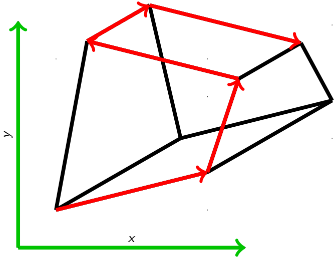
$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant x \leqslant & 1 \\ \varepsilon \cdot x & \leqslant y \leqslant & 1 - \varepsilon \cdot x \\ \varepsilon \cdot y & \leqslant z \leqslant & 1 - \varepsilon \cdot y \end{array}$$

Idee (Schiefer Hypercube in 3 Dimensionen)

Ziel: Maximiere z



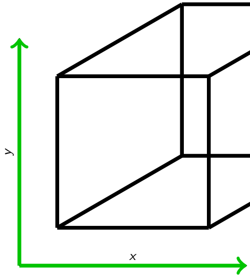
$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant x \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant y \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant z \leqslant & 1 \end{array}$$



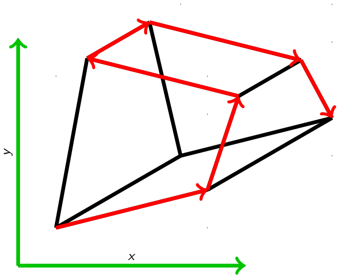
$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant x \leqslant & 1 \\ \varepsilon \cdot x & \leqslant y \leqslant & 1 - \varepsilon \cdot x \\ \varepsilon \cdot y & \leqslant z \leqslant & 1 - \varepsilon \cdot y \end{array}$$

Idee (Schiefer Hypercube in 3 Dimensionen)

Ziel: Maximiere z



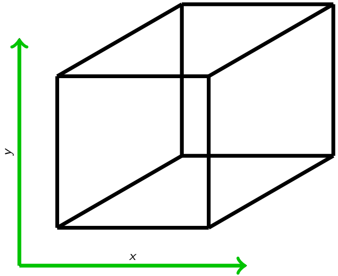
$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant x \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant y \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant z \leqslant & 1 \end{array}$$



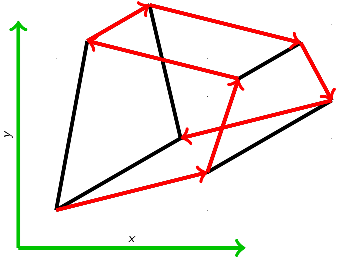
$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant x \leqslant & 1 \\ \varepsilon \cdot x & \leqslant y \leqslant & 1 - \varepsilon \cdot x \\ \varepsilon \cdot y & \leqslant z \leqslant & 1 - \varepsilon \cdot y \end{array}$$

Idee (Schiefer Hypercube in 3 Dimensionen)

Ziel: Maximiere z



$$\begin{aligned} 0 &\leqslant x \leqslant 1 \\ 0 &\leqslant y \leqslant 1 \\ 0 &\leqslant z \leqslant 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 0 &\leqslant x \leqslant 1 \\ \varepsilon \cdot x &\leqslant y \leqslant 1 - \varepsilon \cdot x \\ \varepsilon \cdot y &\leqslant z \leqslant 1 - \varepsilon \cdot y \end{aligned}$$

Beweis

- Aus der Idee ergibt sich das folgende Ungleichungssystem:

Beweis

- Aus der Idee ergibt sich das folgende Ungleichungssystem:
  - Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Beweis

- Aus der Idee ergibt sich das folgende Ungleichungssystem:
  - Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
  - Gegeben sei weiter $0 < \varepsilon \leqslant 1/4$.

Beweis

- Aus der Idee ergibt sich das folgende Ungleichungssystem:
  - Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
  - Gegeben sei weiter $0 < \varepsilon \leqslant 1/4$.
  - Zielfunktion: Maximiere x_n.

Beweis

- Aus der Idee ergibt sich das folgende Ungleichungssystem:
  - Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
  - Gegeben sei weiter $0 < \varepsilon \leqslant 1/4$.
  - Zielfunktion: Maximiere x_n.
  - Nebenbedingungen:

Beweis

- Aus der Idee ergibt sich das folgende Ungleichungssystem:
  - Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
  - Gegeben sei weiter $0 < \varepsilon \leqslant 1/4$.
  - Zielfunktion: Maximiere x_n.
  - Nebenbedingungen:
    - $0 \leqslant x_{\mathbf{1}} \leqslant 1$

Beweis

- Aus der Idee ergibt sich das folgende Ungleichungssystem:
  - Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
  - Gegeben sei weiter $0 < \varepsilon \leqslant 1/4$.
  - Zielfunktion: Maximiere x_n.
  - Nebenbedingungen:
    - $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$
    - $\varepsilon \cdot x_{i-1} \leqslant x_i \leqslant 1 - \varepsilon \cdot x_{i-1}$ $(i \in \{2, 3, \ldots, n\}$.

Beweis

- Aus der Idee ergibt sich das folgende Ungleichungssystem:
  - Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
  - Gegeben sei weiter $0 < \varepsilon \leqslant 1/4$.
  - Zielfunktion: Maximiere x_n.
  - Nebenbedingungen:
    - $0 \leqslant x_{\mathbf{1}} \leqslant 1$
    - $\varepsilon \cdot x_{i-\mathbf{1}} \leqslant x_i \leqslant 1 - \varepsilon \cdot x_{i-\mathbf{1}}$ $(i \in \{2, 3, \ldots, n\}$.
- Beweis für $\varepsilon \leqslant 1/4$ führen wir hier nicht.

Beweis

- Aus der Idee ergibt sich das folgende Ungleichungssystem:
  - Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
  - Gegeben sei weiter $0 < \varepsilon \leqslant 1/4$.
  - Zielfunktion: Maximiere x_n.
  - Nebenbedingungen:
    - $0 \leqslant x_{\mathbf{1}} \leqslant 1$
    - $\varepsilon \cdot x_{i-\mathbf{1}} \leqslant x_i \leqslant 1 - \varepsilon \cdot x_{i-\mathbf{1}}$ $(i \in \{2, 3, \ldots, n\}$.
- Beweis für $\varepsilon \leqslant 1/4$ führen wir hier nicht.
- Danach ergibt sich die Behauptung.

Beweis

- Aus der Idee ergibt sich das folgende Ungleichungssystem:
  - Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
  - Gegeben sei weiter $0 < \varepsilon \leqslant 1/4$.
  - Zielfunktion: Maximiere x_n.
  - Nebenbedingungen:
    - $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$
    - $\varepsilon \cdot x_{i-1} \leqslant x_i \leqslant 1 - \varepsilon \cdot x_{i-1}$ $(i \in \{2, 3, \ldots, n\}$.
- Beweis für $\varepsilon \leqslant 1/4$ führen wir hier nicht.
- Danach ergibt sich die Behauptung.

Bisher zur Laufzeit bekannt

- Die Laufzeit kann exponentiell sein.

Bisher zur Laufzeit bekannt

- Die Laufzeit kann exponentiell sein.
- Gute Wahl des Pivotschrittes kann Laufzeit verbessern.

Bisher zur Laufzeit bekannt

- Die Laufzeit kann exponentiell sein.
- Gute Wahl des Pivotschrittes kann Laufzeit verbessern.
- Bisher aber nur bekannt:

Bisher zur Laufzeit bekannt

- Die Laufzeit kann exponentiell sein.
- Gute Wahl des Pivotschrittes kann Laufzeit verbessern.
- Bisher aber nur bekannt:
  - Randomisierte Pivotregeln: $m^{O(\sqrt{m})}$.

Bisher zur Laufzeit bekannt

- Die Laufzeit kann exponentiell sein.
- Gute Wahl des Pivotschrittes kann Laufzeit verbessern.
- Bisher aber nur bekannt:
  - Randomisierte Pivotregeln: $m^{O(\sqrt{m})}$.
  - Offen: Gibt es einen Weg mit polynomieller Länge zum Optimum.

Bisher zur Laufzeit bekannt

- Die Laufzeit kann exponentiell sein.
- Gute Wahl des Pivotschrittes kann Laufzeit verbessern.
- Bisher aber nur bekannt:
  - Randomisierte Pivotregeln: $m^{O(\sqrt{m})}$.
  - Offen: Gibt es einen Weg mit polynomieller Länge zum Optimum.
  - Vermutung von Hirsch (1957) für ein n-dimensionales Polytrop mit m Facetten: der Weg hat maximale Länge $n+m$.

Bisher zur Laufzeit bekannt

- Die Laufzeit kann exponentiell sein.
- Gute Wahl des Pivotschrittes kann Laufzeit verbessern.
- Bisher aber nur bekannt:
  - Randomisierte Pivotregeln: $m^{O(\sqrt{m})}$.
  - Offen: Gibt es einen Weg mit polynomieller Länge zum Optimum.
  - Vermutung von Hirsch (1957) für ein n-dimensionales Polytrop mit m Facetten: der Weg hat maximale Länge $n+m$.
  - Bisher nur gezeigt: Weg hat maximale Länge von $m^{\log_2 n+2}$.

Bisher zur Laufzeit bekannt

- Die Laufzeit kann exponentiell sein.
- Gute Wahl des Pivotschrittes kann Laufzeit verbessern.
- Bisher aber nur bekannt:
  - Randomisierte Pivotregeln: $m^{O(\sqrt{m})}$.
  - Offen: Gibt es einen Weg mit polynomieller Länge zum Optimum.
  - Vermutung von Hirsch (1957) für ein n-dimensionales Polytrop mit m Facetten: der Weg hat maximale Länge $n + m$.
  - Bisher nur gezeigt: Weg hat maximale Länge von $m^{\log_2 n+2}$.
  - Verfahren ist aber für praktische Verfahren gut.

Bisher zur Laufzeit bekannt

- Die Laufzeit kann exponentiell sein.
- Gute Wahl des Pivotschrittes kann Laufzeit verbessern.
- Bisher aber nur bekannt:
  - Randomisierte Pivotregeln: $m^{O(\sqrt{m})}$.
  - Offen: Gibt es einen Weg mit polynomieller Länge zum Optimum.
  - Vermutung von Hirsch (1957) für ein n-dimensionales Polytrop mit m Facetten: der Weg hat maximale Länge $n + m$.
  - Bisher nur gezeigt: Weg hat maximale Länge von $m^{\log_2 n+2}$.
  - Verfahren ist aber für praktische Verfahren gut.
  - Für zufällige Eingaben ist polynomielle Laufzeit bewiesen.

Bisher zur Laufzeit bekannt

- Die Laufzeit kann exponentiell sein.
- Gute Wahl des Pivotschrittes kann Laufzeit verbessern.
- Bisher aber nur bekannt:
  - Randomisierte Pivotregeln: $m^{O(\sqrt{m})}$.
  - Offen: Gibt es einen Weg mit polynomieller Länge zum Optimum.
  - Vermutung von Hirsch (1957) für ein n-dimensionales Polytrop mit m Facetten: der Weg hat maximale Länge $n + m$.
  - Bisher nur gezeigt: Weg hat maximale Länge von $m^{\log_2 n+2}$.
  - Verfahren ist aber für praktische Verfahren gut.
  - Für zufällige Eingaben ist polynomielle Laufzeit bewiesen.

Problem bei Degenerierten LPs

- Falls das LP degeneriert ist, so treffen sich mehr als d Hyperebenen an einem Punkt.

Problem bei Degenerierten LPs

- Falls das LP degeneriert ist, so treffen sich mehr als d Hyperebenen an einem Punkt.
- Damit kann es sein, dass eine Hyperebene ausgetauscht wird, ohne das eine Verbesserung stattfindet.

Problem bei Degenerierten LPs

- Falls das LP degeneriert ist, so treffen sich mehr als d Hyperebenen an einem Punkt.
- Damit kann es sein, dass eine Hyperebene ausgetauscht wird, ohne das eine Verbesserung stattfindet.
- Es könnten schlimmstenfalls Zyklen auftreten.

Problem bei Degenerierten LPs

- Falls das LP degeneriert ist, so treffen sich mehr als d Hyperebenen an einem Punkt.
- Damit kann es sein, dass eine Hyperebene ausgetauscht wird, ohne das eine Verbesserung stattfindet.
- Es könnten schlimmstenfalls Zyklen auftreten.
- Um dies zu verhindern, kann man anwenden:

Problem bei Degenerierten LPs

- Falls das LP degeneriert ist, so treffen sich mehr als d Hyperebenen an einem Punkt.
- Damit kann es sein, dass eine Hyperebene ausgetauscht wird, ohne das eine Verbesserung stattfindet.
- Es könnten schlimmstenfalls Zyklen auftreten.
- Um dies zu verhindern, kann man anwenden:
  - Blands Pivotregel:

Problem bei Degenerierten LPs

- Falls das LP degeneriert ist, so treffen sich mehr als d Hyperebenen an einem Punkt.
- Damit kann es sein, dass eine Hyperebene ausgetauscht wird, ohne das eine Verbesserung stattfindet.
- Es könnten schlimmstenfalls Zyklen auftreten.
- Um dies zu verhindern, kann man anwenden:
  - Blands Pivotregel:
    - Wähle j minimal, danach wähle $\delta(i)$ minimal.

Problem bei Degenerierten LPs

- Falls das LP degeneriert ist, so treffen sich mehr als d Hyperebenen an einem Punkt.
- Damit kann es sein, dass eine Hyperebene ausgetauscht wird, ohne das eine Verbesserung stattfindet.
- Es könnten schlimmstenfalls Zyklen auftreten.
- Um dies zu verhindern, kann man anwenden:
  - Blands Pivotregel:
    - Wähle j minimal, danach wähle $\delta(i)$ minimal.
    - Dann treten (ohne Beweis) keine Zyklen auf.

Problem bei Degenerierten LPs

- Falls das LP degeneriert ist, so treffen sich mehr als d Hyperebenen an einem Punkt.
- Damit kann es sein, dass eine Hyperebene ausgetauscht wird, ohne das eine Verbesserung stattfindet.
- Es könnten schlimmstenfalls Zyklen auftreten.
- Um dies zu verhindern, kann man anwenden:
  - Blands Pivotregel:
    - Wähle j minimal, danach wähle $\delta(i)$ minimal.
    - Dann treten (ohne Beweis) keine Zyklen auf.
    - Regel ist einfach, aber legt Reihenfolge fest.

Problem bei Degenerierten LPs

- Falls das LP degeneriert ist, so treffen sich mehr als d Hyperebenen an einem Punkt.
- Damit kann es sein, dass eine Hyperebene ausgetauscht wird, ohne das eine Verbesserung stattfindet.
- Es könnten schlimmstenfalls Zyklen auftreten.
- Um dies zu verhindern, kann man anwenden:
  - Blands Pivotregel:
    - Wähle j minimal, danach wähle $\delta(i)$ minimal.
    - Dann treten (ohne Beweis) keine Zyklen auf.
    - Regel ist einfach, aber legt Reihenfolge fest.
  - Wähle Kante mit [größter] Steigung.

Problem bei Degenerierten LPs

- Falls das LP degeneriert ist, so treffen sich mehr als d Hyperebenen an einem Punkt.
- Damit kann es sein, dass eine Hyperebene ausgetauscht wird, ohne das eine Verbesserung stattfindet.
- Es könnten schlimmstenfalls Zyklen auftreten.
- Um dies zu verhindern, kann man anwenden:
  - Blands Pivotregel:
    - Wähle j minimal, danach wähle $\delta(i)$ minimal.
    - Dann treten (ohne Beweis) keine Zyklen auf.
    - Regel ist einfach, aber legt Reihenfolge fest.
  - Wähle Kante mit [größter] Steigung.
  - Perturbierung (siehe folgende Folien).

Problem bei Degenerierten LPs

- Falls das LP degeneriert ist, so treffen sich mehr als d Hyperebenen an einem Punkt.
- Damit kann es sein, dass eine Hyperebene ausgetauscht wird, ohne das eine Verbesserung stattfindet.
- Es könnten schlimmstenfalls Zyklen auftreten.
- Um dies zu verhindern, kann man anwenden:
  - Blands Pivotregel:
    - Wähle j minimal, danach wähle $\delta(i)$ minimal.
    - Dann treten (ohne Beweis) keine Zyklen auf.
    - Regel ist einfach, aber legt Reihenfolge fest.
  - Wähle Kante mit [größter] Steigung.
  - Perturbierung (siehe folgende Folien).
  - Symbolische Perturbierung (siehe die danach folgende Folien).

Problem bei Degenerierten LPs

- Falls das LP degeneriert ist, so treffen sich mehr als d Hyperebenen an einem Punkt.
- Damit kann es sein, dass eine Hyperebene ausgetauscht wird, ohne das eine Verbesserung stattfindet.
- Es könnten schlimmstenfalls Zyklen auftreten.
- Um dies zu verhindern, kann man anwenden:
  - Blands Pivotregel:
    - Wähle j minimal, danach wähle $\delta(i)$ minimal.
    - Dann treten (ohne Beweis) keine Zyklen auf.
    - Regel ist einfach, aber legt Reihenfolge fest.
  - Wähle Kante mit [größter] Steigung.
  - Perturbierung (siehe folgende Folien).
  - Symbolische Perturbierung (siehe die danach folgende Folien).

Idee

- Falls sich mehr als d Hyperebenen im LP LP in einem Punkt treffen,

Idee

- Falls sich mehr als d Hyperebenen im LP LP in einem Punkt treffen,
- so verschieben wir diese:

Idee

- Falls sich mehr als d Hyperebenen im LP LP in einem Punkt treffen,
- so verschieben wir diese:
  - Um ein kleines Epsilon.

Idee

- Falls sich mehr als d Hyperebenen im LP LP in einem Punkt treffen,
- so verschieben wir diese:
  - Um ein kleines Epsilon.
  - Für jede Hyperebene ein anders Epsilon.

Idee

- Falls sich mehr als d Hyperebenen im LP LP in einem Punkt treffen,
- so verschieben wir diese:
  - Um ein kleines Epsilon.
  - Für jede Hyperebene ein anders Epsilon.
  - Ohne das Polyhedron zu verkleinern.

Idee

- Falls sich mehr als d Hyperebenen im LP LP in einem Punkt treffen,
- so verschieben wir diese:
  - Um ein kleines Epsilon.
  - Für jede Hyperebene ein anders Epsilon.
  - Ohne das Polyhedron zu verkleinern.
- In der Tat: definiere neues $LP(\varepsilon)$:

Idee

- Falls sich mehr als d Hyperebenen im LP LP in einem Punkt treffen,
- so verschieben wir diese:
  - Um ein kleines Epsilon.
  - Für jede Hyperebene ein anders Epsilon.
  - Ohne das Polyhedron zu verkleinern.
- In der Tat: definiere neues $LP(\varepsilon)$:
  - $A \cdot x = \hat{b}$ mit $\hat{b} = b + \vec{\varepsilon}$.

Idee

- Falls sich mehr als d Hyperebenen im LP LP in einem Punkt treffen,
- so verschieben wir diese:
  - Um ein kleines Epsilon.
  - Für jede Hyperebene ein anders Epsilon.
  - Ohne das Polyhedron zu verkleinern.
- In der Tat: definiere neues $LP(\varepsilon)$:
  - $A \cdot x = \hat{b}$ mit $\hat{b} = b + \vec{\varepsilon}$.
  - Mit $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^m)^T$.

Idee

- Falls sich mehr als d Hyperebenen im LP LP in einem Punkt treffen,
- so verschieben wir diese:
  - Um ein kleines Epsilon.
  - Für jede Hyperebene ein anders Epsilon.
  - Ohne das Polyhedron zu verkleinern.
- In der Tat: definiere neues $LP(\varepsilon)$:
  - $A \cdot x = \hat{b}$ mit $\hat{b} = b + \vec{\varepsilon}$.
  - Mit $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^m)^T$.

Aussagen

Maximiere $c^T x$, beachte dabei $A \cdot x = b$

Theorem

Es gibt ein $\gamma > 0$, so dass für jedes $\varepsilon \in (0, \gamma)$ gilt:

Aussagen

Theorem

Es gibt ein $\gamma > 0$, so dass für jedes $\varepsilon \in (0, \gamma)$ gilt:

1. *Das LP $LP(\varepsilon)$ ist nicht-degeneriert.*

Aussagen

Theorem

Es gibt ein $\gamma > 0$, so dass für jedes $\varepsilon \in (0, \gamma)$ gilt:

1. *Das LP LP(ε) ist nicht-degeneriert.*
2. *Jede zulässige Basis für LP(ε) ist eine zulässige Basis für LP.*

Aussagen

Theorem

Es gibt ein $\gamma > 0$, so dass für jedes $\varepsilon \in (0, \gamma)$ gilt:

1. *Das LP LP(ε) ist nicht-degeneriert.*
2. *Jede zulässige Basis für LP(ε) ist eine zulässige Basis für LP.*
3. *Jede optimale Basis für LP(ε) ist eine optimale Basis für LP.*

Aussagen

Theorem

Es gibt ein $\gamma > 0$, so dass für jedes $\varepsilon \in (0, \gamma)$ gilt:

1. *Das LP $LP(\varepsilon)$ ist nicht-degeneriert.*
2. *Jede zulässige Basis für $LP(\varepsilon)$ ist eine zulässige Basis für LP.*
3. *Jede optimale Basis für $LP(\varepsilon)$ ist eine optimale Basis für LP.*

Aussagen

Theorem

Es gibt ein $\gamma > 0$, so dass für jedes $\varepsilon \in (0, \gamma)$ gilt:

1. *Das LP LP(ε) ist nicht-degeneriert.*
2. *Jede zulässige Basis für LP(ε) ist eine zulässige Basis für LP.*
3. *Jede optimale Basis für LP(ε) ist eine optimale Basis für LP.*

Beweis (Zeige dritte Aussage):

- Eine optimale Basis ist zulässig,

Aussagen

Theorem

Es gibt ein $\gamma > 0$, so dass für jedes $\varepsilon \in (0, \gamma)$ gilt:

1. *Das LP LP(ε) ist nicht-degeneriert.*
2. *Jede zulässige Basis für LP(ε) ist eine zulässige Basis für LP.*
3. *Jede optimale Basis für LP(ε) ist eine optimale Basis für LP.*

Beweis (Zeige dritte Aussage):

- Eine optimale Basis ist zulässig,
- und der Vektor der reduzierten Kosten hat keinen positiven Eintrag.

Aussagen

Theorem

Es gibt ein $\gamma > 0$, so dass für jedes $\varepsilon \in (0, \gamma)$ gilt:

1. *Das LP $LP(\varepsilon)$ ist nicht-degeneriert.*
2. *Jede zulässige Basis für $LP(\varepsilon)$ ist eine zulässige Basis für LP.*
3. *Jede optimale Basis für $LP(\varepsilon)$ ist eine optimale Basis für LP.*

Beweis (Zeige dritte Aussage):

- Eine optimale Basis ist zulässig,
- und der Vektor der reduzierten Kosten hat keinen positiven Eintrag.
- In LP und $LP(\varepsilon)$ sind die Vektoren der reduzierten Kosten gleich.

Aussagen

Theorem

Es gibt ein $\gamma > 0$, so dass für jedes $\varepsilon \in (0, \gamma)$ gilt:

1. *Das LP $LP(\varepsilon)$ ist nicht-degeneriert.*
2. *Jede zulässige Basis für $LP(\varepsilon)$ ist eine zulässige Basis für LP.*
3. *Jede optimale Basis für $LP(\varepsilon)$ ist eine optimale Basis für LP.*

Beweis (Zeige dritte Aussage):

- Eine optimale Basis ist zulässig,
- und der Vektor der reduzierten Kosten hat keinen positiven Eintrag.
- In LP und $LP(\varepsilon)$ sind die Vektoren der reduzierten Kosten gleich.
- Damit folgt die dritte Aussage aus der zweiten.

Aussagen

Theorem

Es gibt ein $\gamma > 0$, so dass für jedes $\varepsilon \in (0, \gamma)$ gilt:

1. *Das LP $LP(\varepsilon)$ ist nicht-degeneriert.*
2. *Jede zulässige Basis für $LP(\varepsilon)$ ist eine zulässige Basis für LP.*
3. *Jede optimale Basis für $LP(\varepsilon)$ ist eine optimale Basis für LP.*

Beweis (Zeige dritte Aussage):

- Eine optimale Basis ist zulässig,
- und der Vektor der reduzierten Kosten hat keinen positiven Eintrag.
- In LP und $LP(\varepsilon)$ sind die Vektoren der reduzierten Kosten gleich.
- Damit folgt die dritte Aussage aus der zweiten.

Zeige erste Aussage

Maximiere $c^T x$, beachte dabei $A \cdot x = b$

- Sei δ eine Basis.

Zeige erste Aussage

- Sei δ eine Basis.
- Damit gilt: $x_\delta = A_\delta^{-1} \cdot (b + \vec{\varepsilon}) = A_\delta^{-1} \cdot b + A_\delta^{-1} \cdot \vec{\varepsilon}$.

Zeige erste Aussage

- Sei δ eine Basis.
- Damit gilt: $x_\delta = A_\delta^{-1} \cdot (b + \vec{\varepsilon}) = A_\delta^{-1} \cdot b + A_\delta^{-1} \cdot \vec{\varepsilon}$.
- Setze $\hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$ und $A' = A_\delta^{-1}$.

Zeige erste Aussage

- Sei δ eine Basis.
- Damit gilt: $x_\delta = A_\delta^{-1} \cdot (b + \vec{\varepsilon}) = A_\delta^{-1} \cdot b + A_\delta^{-1} \cdot \vec{\varepsilon}$.
- Setze $\hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$ und $A' = A_\delta^{-1}$.
- Damit gilt nun: $x_i = \hat{b}_i + \sum_{j=1}^{m} {a'}_{i,j} \cdot \varepsilon^j$.

Zeige erste Aussage

Maximiere $c^T x$, beachte dabei $A \cdot x = b$

- Sei δ eine Basis.
- Damit gilt: $x_\delta = A_\delta^{-1} \cdot (b + \vec{\varepsilon}) = A_\delta^{-1} \cdot b + A_\delta^{-1} \cdot \vec{\varepsilon}$.
- Setze $\hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$ und $A' = A_\delta^{-1}$.
- Damit gilt nun: $x_i = \hat{b}_i + \sum_{j=1}^{m} {a'}_{i,j} \cdot \varepsilon^j$.
- Damit wird x_i durch das Polynom $p_{\delta,i}(s) = \hat{b}_i + \sum_{j=1}^{m} {a'}_{i,j} \cdot s^j$ bestimmt.

Zeige erste Aussage

- Sei δ eine Basis.
- Damit gilt: $x_\delta = A_\delta^{-1} \cdot (b + \vec{\varepsilon}) = A_\delta^{-1} \cdot b + A_\delta^{-1} \cdot \vec{\varepsilon}$.
- Setze $\hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$ und $A' = A_\delta^{-1}$.
- Damit gilt nun: $x_i = \hat{b}_i + \sum_{j=1}^{m} {a'}_{i,j} \cdot \varepsilon^j$.
- Damit wird x_i durch das Polynom $p_{\delta,i}(s) = \hat{b}_i + \sum_{j=1}^{m} {a'}_{i,j} \cdot s^j$ bestimmt.
- Da A' invertierbar, gibt es für jedes i ein j mit $a_{i,j} \neq 0$.

Zeige erste Aussage

- Sei δ eine Basis.
- Damit gilt: $x_\delta = A_\delta^{-1} \cdot (b + \vec{\varepsilon}) = A_\delta^{-1} \cdot b + A_\delta^{-1} \cdot \vec{\varepsilon}$.
- Setze $\hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$ und $A' = A_\delta^{-1}$.
- Damit gilt nun: $x_i = \hat{b}_i + \sum_{j=1}^{m} {a'}_{i,j} \cdot \varepsilon^j$.
- Damit wird x_i durch das Polynom $p_{\delta,i}(s) = \hat{b}_i + \sum_{j=1}^{m} {a'}_{i,j} \cdot s^j$ bestimmt.
- Da A' invertierbar, gibt es für jedes i ein j mit $a_{i,j} \neq 0$.
- Nun betrachten wir die Nullstellen von $p_{\delta,i}$:

Zeige erste Aussage

- Sei δ eine Basis.
- Damit gilt: $x_\delta = A_\delta^{-1} \cdot (b + \vec{\varepsilon}) = A_\delta^{-1} \cdot b + A_\delta^{-1} \cdot \vec{\varepsilon}$.
- Setze $\hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$ und $A' = A_\delta^{-1}$.
- Damit gilt nun: $x_i = \hat{b}_i + \sum_{j=1}^m a'_{i,j} \cdot \varepsilon^j$.
- Damit wird x_i durch das Polynom $p_{\delta,i}(s) = \hat{b}_i + \sum_{j=1}^m a'_{i,j} \cdot s^j$ bestimmt.
- Da A' invertierbar, gibt es für jedes i ein j mit $a_{i,j} \neq 0$.
- Nun betrachten wir die Nullstellen von $p_{\delta,i}$:
  - Setze $\gamma_{\delta,i} = \infty$ falls $p_{\delta,i}$ keine positiven Nullstellen hat.

Zeige erste Aussage

- Sei δ eine Basis.
- Damit gilt: $x_\delta = A_\delta^{-1} \cdot (b + \vec{\varepsilon}) = A_\delta^{-1} \cdot b + A_\delta^{-1} \cdot \vec{\varepsilon}$.
- Setze $\hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$ und $A' = A_\delta^{-1}$.
- Damit gilt nun: $x_i = \hat{b}_i + \sum_{j=1}^m a'_{i,j} \cdot \varepsilon^j$.
- Damit wird x_i durch das Polynom $p_{\delta,i}(s) = \hat{b}_i + \sum_{j=1}^m a'_{i,j} \cdot s^j$ bestimmt.
- Da A' invertierbar, gibt es für jedes i ein j mit $a_{i,j} \neq 0$.
- Nun betrachten wir die Nullstellen von $p_{\delta,i}$:
  - Setze $\gamma_{\delta,i} = \infty$ falls $p_{\delta,i}$ keine positiven Nullstellen hat.
  - Anderenfalls sei $\gamma_{\delta,i}$ die kleinste positive Nullstelle von $p_{\delta,i}$.

Zeige erste Aussage

- Sei δ eine Basis.
- Damit gilt: $x_\delta = A_\delta^{-1} \cdot (b + \vec{\varepsilon}) = A_\delta^{-1} \cdot b + A_\delta^{-1} \cdot \vec{\varepsilon}$.
- Setze $\hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$ und $A' = A_\delta^{-1}$.
- Damit gilt nun: $x_i = \hat{b}_i + \sum_{j=1}^{m} a'_{i,j} \cdot \varepsilon^j$.
- Damit wird x_i durch das Polynom $p_{\delta,i}(s) = \hat{b}_i + \sum_{j=1}^{m} a'_{i,j} \cdot s^j$ bestimmt.
- Da A' invertierbar, gibt es für jedes i ein j mit $a_{i,j} \neq 0$.
- Nun betrachten wir die Nullstellen von $p_{\delta,i}$:
  - Setze $\gamma_{\delta,i} = \infty$ falls $p_{\delta,i}$ keine positiven Nullstellen hat.
  - Anderenfalls sei $\gamma_{\delta,i}$ die kleinste positive Nullstelle von $p_{\delta,i}$.
- Setze $\gamma = \min(\gamma_{\delta,i})$.

Zeige erste Aussage

- Sei δ eine Basis.
- Damit gilt: $x_\delta = A_\delta^{-1} \cdot (b + \vec{\varepsilon}) = A_\delta^{-1} \cdot b + A_\delta^{-1} \cdot \vec{\varepsilon}$.
- Setze $\hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$ und $A' = A_\delta^{-1}$.
- Damit gilt nun: $x_i = \hat{b}_i + \sum_{j=1}^m a'_{i,j} \cdot \varepsilon^j$.
- Damit wird x_i durch das Polynom $p_{\delta,i}(s) = \hat{b}_i + \sum_{j=1}^m a'_{i,j} \cdot s^j$ bestimmt.
- Da A' invertierbar, gibt es für jedes i ein j mit $a_{i,j} \neq 0$.
- Nun betrachten wir die Nullstellen von $p_{\delta,i}$:
  - Setze $\gamma_{\delta,i} = \infty$ falls $p_{\delta,i}$ keine positiven Nullstellen hat.
  - Anderenfalls sei $\gamma_{\delta,i}$ die kleinste positive Nullstelle von $p_{\delta,i}$.
- Setze $\gamma = \min(\gamma_{\delta,i})$.
- Für jede Basis δ, für jede Basisvariable x_j und für $\varepsilon < \gamma$ sind nun alle $p_{\delta,j}(\varepsilon) \neq 0$.

Zeige erste Aussage

- Sei δ eine Basis.
- Damit gilt: $x_\delta = A_\delta^{-1} \cdot (b + \vec{\varepsilon}) = A_\delta^{-1} \cdot b + A_\delta^{-1} \cdot \vec{\varepsilon}$.
- Setze $\hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$ und $A' = A_\delta^{-1}$.
- Damit gilt nun: $x_i = \hat{b}_i + \sum_{j=1}^m a'_{i,j} \cdot \varepsilon^j$.
- Damit wird x_i durch das Polynom $p_{\delta,i}(s) = \hat{b}_i + \sum_{j=1}^m a'_{i,j} \cdot s^j$ bestimmt.
- Da A' invertierbar, gibt es für jedes i ein j mit $a_{i,j} \neq 0$.
- Nun betrachten wir die Nullstellen von $p_{\delta,i}$:
  - Setze $\gamma_{\delta,i} = \infty$ falls $p_{\delta,i}$ keine positiven Nullstellen hat.
  - Anderenfalls sei $\gamma_{\delta,i}$ die kleinste positive Nullstelle von $p_{\delta,i}$.
- Setze $\gamma = \min(\gamma_{\delta,i})$.
- Für jede Basis δ, für jede Basisvariable x_j und für $\varepsilon < \gamma$ sind nun alle $p_{\delta,j}(\varepsilon) \neq 0$.
- Damit sind alle Basisvariablen $x_j > 0$.

Zeige erste Aussage

- Sei δ eine Basis.
- Damit gilt: $x_\delta = A_\delta^{-1} \cdot (b + \vec{\varepsilon}) = A_\delta^{-1} \cdot b + A_\delta^{-1} \cdot \vec{\varepsilon}$.
- Setze $\hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$ und $A' = A_\delta^{-1}$.
- Damit gilt nun: $x_i = \hat{b}_i + \sum_{j=1}^m {a'}_{i,j} \cdot \varepsilon^j$.
- Damit wird x_i durch das Polynom $p_{\delta,i}(s) = \hat{b}_i + \sum_{j=1}^m {a'}_{i,j} \cdot s^j$ bestimmt.
- Da A' invertierbar, gibt es für jedes i ein j mit $a_{i,j} \neq 0$.
- Nun betrachten wir die Nullstellen von $p_{\delta,i}$:
  - Setze $\gamma_{\delta,i} = \infty$ falls $p_{\delta,i}$ keine positiven Nullstellen hat.
  - Anderenfalls sei $\gamma_{\delta,i}$ die kleinste positive Nullstelle von $p_{\delta,i}$.
- Setze $\gamma = \min(\gamma_{\delta,i})$.
- Für jede Basis δ, für jede Basisvariable x_j und für $\varepsilon < \gamma$ sind nun alle $p_{\delta,j}(\varepsilon) \neq 0$.
- Damit sind alle Basisvariablen $x_j > 0$.

Zeige zweite Aussage

- Sei x^* die Basislösung zur Basis δ.

Zeige zweite Aussage

- Sei x^* die Basislösung zur Basis δ.
- Damit gilt $x^* \geqslant 0$.

Zeige zweite Aussage

- Sei x^* die Basislösung zur Basis δ.
- Damit gilt $x^* \geqslant 0$.
- Für die Basisvariablen gilt:

$$x_i^* = \hat{b} + \sum_{j=1}^{m} a'_{i,j} \cdot \varepsilon^j > 0.$$

Zeige zweite Aussage

- Sei x^* die Basislösung zur Basis δ.
- Damit gilt $x^* \geqslant 0$.
- Für die Basisvariablen gilt:

$$x_i^* = \hat{b} + \sum_{j=1}^{m} a'_{i,j} \cdot \varepsilon^j > 0.$$

- Wir zeigen nun $\hat{b}_i > 0$.

Zeige zweite Aussage

- Sei x^* die Basislösung zur Basis δ.
- Damit gilt $x^* \geqslant 0$.
- Für die Basisvariablen gilt:

$$x_i^* = \hat{b} + \sum_{j=1}^{m} a'_{i,j} \cdot \varepsilon^j > 0.$$

- Wir zeigen nun $\hat{b}_i > 0$.
    - Angenommen es gelte für ein j: $\hat{b}_j < 0$.

Zeige zweite Aussage

- Sei x^* die Basislösung zur Basis δ.
- Damit gilt $x^* \geqslant 0$.
- Für die Basisvariablen gilt:

$$x_i^* = \hat{b} + \sum_{j=1}^{m} a'_{i,j} \cdot \varepsilon^j > 0.$$

- Wir zeigen nun $\hat{b}_i > 0$.
  - Angenommen es gelte für ein j: $\hat{b}_j < 0$.
  - Damit folgt: $p_{\delta,j}(0) < 0$.

Zeige zweite Aussage

- Sei x^* die Basislösung zur Basis δ.
- Damit gilt $x^* \geqslant 0$.
- Für die Basisvariablen gilt:

$$x_i^* = \hat{b} + \sum_{j=1}^{m} a'_{i,j} \cdot \varepsilon^j > 0.$$

- Wir zeigen nun $\hat{b}_i > 0$.
  - Angenommen es gelte für ein j: $\hat{b}_j < 0$.
  - Damit folgt: $p_{\delta,j}(0) < 0$.
  - Es gilt aber auch: $p_{\delta,j}(\varepsilon) > 0$.

Zeige zweite Aussage

- Sei x^* die Basislösung zur Basis δ.
- Damit gilt $x^* \geqslant 0$.
- Für die Basisvariablen gilt:

$$x_i^* = \hat{b} + \sum_{j=1}^{m} a'_{i,j} \cdot \varepsilon^j > 0.$$

- Wir zeigen nun $\hat{b}_i > 0$.
  - Angenommen es gelte für ein j: $\hat{b}_j < 0$.
  - Damit folgt: $p_{\delta,j}(0) < 0$.
  - Es gilt aber auch: $p_{\delta,j}(\varepsilon) > 0$.
  - Widerspruch zur Wahl von γ und der Stetigkeit von p.

Zeige zweite Aussage

- Sei x^* die Basislösung zur Basis δ.
- Damit gilt $x^* \geqslant 0$.
- Für die Basisvariablen gilt:

$$x_i^* = \hat{b} + \sum_{j=1}^{m} a'_{i,j} \cdot \varepsilon^j > 0.$$

- Wir zeigen nun $\hat{b}_i > 0$.
  - Angenommen es gelte für ein j: $\hat{b}_j < 0$.
  - Damit folgt: $p_{\delta,j}(0) < 0$.
  - Es gilt aber auch: $p_{\delta,j}(\varepsilon) > 0$.
  - Widerspruch zur Wahl von γ und der Stetigkeit von p.
- Damit ist die Behauptung beweisen, denn $x_\delta = \hat{b}$ ist Basislösung für LP.

Zeige zweite Aussage

- Sei x^* die Basislösung zur Basis δ.
- Damit gilt $x^* \geqslant 0$.
- Für die Basisvariablen gilt:

$$x_i^* = \hat{b} + \sum_{j=1}^{m} a'_{i,j} \cdot \varepsilon^j > 0.$$

- Wir zeigen nun $\hat{b}_i > 0$.
  - Angenommen es gelte für ein j: $\hat{b}_j < 0$.
  - Damit folgt: $p_{\delta,j}(0) < 0$.
  - Es gilt aber auch: $p_{\delta,j}(\varepsilon) > 0$.
  - Widerspruch zur Wahl von γ und der Stetigkeit von p.
- Damit ist die Behauptung beweisen, denn $x_\delta = \hat{b}$ ist Basislösung für LP.

Wahl von ε

- Wähle ε kleiner als die kleinste positive Nullstelle von $p(s) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \cdot s^i$.

Wahl von ε

- Wähle ε kleiner als die kleinste positive Nullstelle von $p(s) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \cdot s^i$.
- Wir können o.B.d.A. annehmen: $\beta_0 > 0$.

Wahl von ε

- Wähle ε kleiner als die kleinste positive Nullstelle von $p(s) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \cdot s^i$.
- Wir können o.B.d.A. annehmen: $\beta_0 > 0$.
  - Kann durch Verändern von p immer erreicht werden:

Wahl von ε

- Wähle ε kleiner als die kleinste positive Nullstelle von $p(s) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \cdot s^i$.
- Wir können o.B.d.A. annehmen: $\beta_0 > 0$.
  - Kann durch Verändern von p immer erreicht werden:
  - durch Teilen mit s und ggf. multiplizieren mit -1.

Wahl von ε

- Wähle ε kleiner als die kleinste positive Nullstelle von $p(s) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \cdot s^i$.
- Wir können o.B.d.A. annehmen: $\beta_0 > 0$.
  - Kann durch Verändern von p immer erreicht werden:
  - durch Teilen mit s und ggf. multiplizieren mit -1.
  - Die Nullstellen bleiben dabei unverändert.

Wahl von ε

- Wähle ε kleiner als die kleinste positive Nullstelle von $p(s) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \cdot s^i$.
- Wir können o.B.d.A. annehmen: $\beta_0 > 0$.
  - Kann durch Verändern von p immer erreicht werden:
  - durch Teilen mit s und ggf. multiplizieren mit -1.
  - Die Nullstellen bleiben dabei unverändert.
- Sei weiter β größer als die Nenner und Zähler der β_i.

Wahl von ε

- Wähle ε kleiner als die kleinste positive Nullstelle von $p(s) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \cdot s^i$.
- Wir können o.B.d.A. annehmen: $\beta_0 > 0$.
  - Kann durch Verändern von p immer erreicht werden:
  - durch Teilen mit s und ggf. multiplizieren mit -1.
  - Die Nullstellen bleiben dabei unverändert.
- Sei weiter β größer als die Nenner und Zähler der β_i.
- Für jedes $\rho \in (0, \frac{1}{2 \cdot \beta^2})$ gilt nun:

$$|p(\rho)| \quad = \quad |\sum_{i=0}^{m} \beta_i \cdot \rho^i|$$

Wahl von ε

- Wähle ε kleiner als die kleinste positive Nullstelle von $p(s) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \cdot s^i$.
- Wir können o.B.d.A. annehmen: $\beta_0 > 0$.
  - Kann durch Verändern von p immer erreicht werden:
  - durch Teilen mit s und ggf. multiplizieren mit -1.
  - Die Nullstellen bleiben dabei unverändert.
- Sei weiter β größer als die Nenner und Zähler der β_i.
- Für jedes $\rho \in (0, \frac{1}{2 \cdot \beta^2})$ gilt nun:

$$\begin{aligned} |p(\rho)| &= |\sum_{i=0}^{m} \beta_i \cdot \rho^i| \\ &\geqslant \beta_0 - \sum_{i=1}^{m} |\beta_i| \cdot \rho^i \end{aligned}$$

Wahl von ε

- Wähle ε kleiner als die kleinste positive Nullstelle von $p(s) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \cdot s^i$.
- Wir können o.B.d.A. annehmen: $\beta_0 > 0$.
  - Kann durch Verändern von p immer erreicht werden:
  - durch Teilen mit s und ggf. multiplizieren mit -1.
  - Die Nullstellen bleiben dabei unverändert.
- Sei weiter β größer als die Nenner und Zähler der β_i.
- Für jedes $\rho \in (0, \frac{1}{2 \cdot \beta^2})$ gilt nun:

$$
\begin{aligned}
|p(\rho)| &= \left|\sum_{i=0}^{m} \beta_i \cdot \rho^i\right| \\
&\geqslant \beta_0 - \sum_{i=1}^{m} |\beta_i| \cdot \rho^i \\
&\geqslant \frac{1}{\beta} - \sum_{i=1}^{m} \beta\left(\frac{1}{2 \cdot \beta^2}\right)^i
\end{aligned}
$$

Wahl von ε

- Wähle ε kleiner als die kleinste positive Nullstelle von $p(s) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \cdot s^i$.
- Wir können o.B.d.A. annehmen: $\beta_0 > 0$.
  - Kann durch Verändern von p immer erreicht werden:
  - durch Teilen mit s und ggf. multiplizieren mit -1.
  - Die Nullstellen bleiben dabei unverändert.
- Sei weiter β größer als die Nenner und Zähler der β_i.
- Für jedes $\rho \in (0, \frac{1}{2 \cdot \beta^2})$ gilt nun:

$$
\begin{aligned}
|p(\rho)| &= \left| \sum_{i=0}^{m} \beta_i \cdot \rho^i \right| \\
&\geqslant \beta_0 - \sum_{i=1}^{m} |\beta_i| \cdot \rho^i \\
&\geqslant \frac{1}{\beta} - \sum_{i=1}^{m} \beta \left(\frac{1}{2 \cdot \beta^2}\right)^i \\
&\geqslant \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1} \left(\frac{1}{2}\right)^i > 0.
\end{aligned}
$$

Wahl von ε

- Wähle ε kleiner als die kleinste positive Nullstelle von $p(s) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \cdot s^i$.
- Wir können o.B.d.A. annehmen: $\beta_0 > 0$.
  - Kann durch Verändern von p immer erreicht werden:
  - durch Teilen mit s und ggf. multiplizieren mit -1.
  - Die Nullstellen bleiben dabei unverändert.
- Sei weiter β größer als die Nenner und Zähler der β_i.
- Für jedes $\rho \in (0, \frac{1}{2 \cdot \beta^2})$ gilt nun:

$$\begin{aligned} |p(\rho)| &= |\sum_{i=0}^{m} \beta_i \cdot \rho^i| \\ &\geqslant \beta_0 - \sum_{i=1}^{m} |\beta_i| \cdot \rho^i \\ &\geqslant \frac{1}{\beta} - \sum_{i=1}^{m} \beta (\frac{1}{2 \cdot \beta^2})^i \\ &\geqslant \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1} (\frac{1}{2})^i > 0. \end{aligned}$$

- Wähle also: $\varepsilon = \frac{1}{2 \cdot \beta^2}$.

Wahl von ε

- Wähle ε kleiner als die kleinste positive Nullstelle von $p(s) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \cdot s^i$.
- Wir können o.B.d.A. annehmen: $\beta_0 > 0$.
  - Kann durch Verändern von p immer erreicht werden:
  - durch Teilen mit s und ggf. multiplizieren mit -1.
  - Die Nullstellen bleiben dabei unverändert.
- Sei weiter β größer als die Nenner und Zähler der β_i.
- Für jedes $\rho \in (0, \frac{1}{2 \cdot \beta^2})$ gilt nun:

$$\begin{aligned} |p(\rho)| &= |\sum_{i=0}^{m} \beta_i \cdot \rho^i| \\ &\geqslant \beta_0 - \sum_{i=1}^{m} |\beta_i| \cdot \rho^i \\ &\geqslant \frac{1}{\beta} - \sum_{i=1}^{m} \beta(\frac{1}{2 \cdot \beta^2})^i \\ &\geqslant \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1} (\frac{1}{2})^i > 0. \end{aligned}$$

- Wähle also: $\varepsilon = \frac{1}{2 \cdot \beta^2}$.

Laufzeit

- Wir müssen noch untersuchen, wie sich die Größe der Zahlen ändert, durch die Perturbierung.

Laufzeit

- Wir müssen noch untersuchen, wie sich die Größe der Zahlen ändert, durch die Perturbierung.
- Sei α der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen des LPs in Gleichungsform.

Laufzeit

- Wir müssen noch untersuchen, wie sich die Größe der Zahlen ändert, durch die Perturbierung.
- Sei α der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen des LPs in Gleichungsform.
- Damit gilt $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.

Laufzeit

- Wir müssen noch untersuchen, wie sich die Größe der Zahlen ändert, durch die Perturbierung.
- Sei α der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen des LPs in Gleichungsform.
- Damit gilt $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.
- Es kann damit $\varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha \cdot m)^{-2 \cdot m}$ gesetzt werden.

Laufzeit

- Wir müssen noch untersuchen, wie sich die Größe der Zahlen ändert, durch die Perturbierung.
- Sei α der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen des LPs in Gleichungsform.
- Damit gilt $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.
- Es kann damit $\varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha \cdot m)^{-2 \cdot m}$ gesetzt werden.
- Sei l die maximale Länge der Darstellung der Zahlen aus der Eingabe.

Laufzeit

- Wir müssen noch untersuchen, wie sich die Größe der Zahlen ändert, durch die Perturbierung.
- Sei α der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen des LPs in Gleichungsform.
- Damit gilt $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.
- Es kann damit $\varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha \cdot m)^{-2 \cdot m}$ gesetzt werden.
- Sei l die maximale Länge der Darstellung der Zahlen aus der Eingabe.
- Damit genügen $O(m \cdot (l + \log m)$ Bits zur Darstellung von ε.

Laufzeit

- Wir müssen noch untersuchen, wie sich die Größe der Zahlen ändert, durch die Perturbierung.
- Sei α der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen des LPs in Gleichungsform.
- Damit gilt $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.
- Es kann damit $\varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha \cdot m)^{-2 \cdot m}$ gesetzt werden.
- Sei l die maximale Länge der Darstellung der Zahlen aus der Eingabe.
- Damit genügen $O(m \cdot (l + \log m)$ Bits zur Darstellung von ε.
- Zur Darstellung von $b_i + \varepsilon$ reichen daher $O(m^2 \cdot (l + \log m)$ Bits.

Laufzeit

- Wir müssen noch untersuchen, wie sich die Größe der Zahlen ändert, durch die Perturbierung.
- Sei α der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen des LPs in Gleichungsform.
- Damit gilt $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.
- Es kann damit $\varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha \cdot m)^{-2 \cdot m}$ gesetzt werden.
- Sei l die maximale Länge der Darstellung der Zahlen aus der Eingabe.
- Damit genügen $O(m \cdot (l + \log m)$ Bits zur Darstellung von ε.
- Zur Darstellung von $b_i + \varepsilon$ reichen daher $O(m^2 \cdot (l + \log m)$ Bits.

Laufzeit

- Wir müssen noch untersuchen, wie sich die Größe der Zahlen ändert, durch die Perturbierung.
- Sei α der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen des LPs in Gleichungsform.
- Damit gilt $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.
- Es kann damit $\varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha \cdot m)^{-2 \cdot m}$ gesetzt werden.
- Sei l die maximale Länge der Darstellung der Zahlen aus der Eingabe.
- Damit genügen $O(m \cdot (l + \log m)$ Bits zur Darstellung von ε.
- Zur Darstellung von $b_i + \varepsilon$ reichen daher $O(m^2 \cdot (l + \log m)$ Bits.

Theorem

Die Laufzeit eines Pivotschrittes ist polynomiell beschränkt in der Eingabelänge.

Laufzeit

- Wir müssen noch untersuchen, wie sich die Größe der Zahlen ändert, durch die Perturbierung.
- Sei α der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen des LPs in Gleichungsform.
- Damit gilt $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.
- Es kann damit $\varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha \cdot m)^{-2 \cdot m}$ gesetzt werden.
- Sei l die maximale Länge der Darstellung der Zahlen aus der Eingabe.
- Damit genügen $O(m \cdot (l + \log m)$ Bits zur Darstellung von ε.
- Zur Darstellung von $b_i + \varepsilon$ reichen daher $O(m^2 \cdot (l + \log m)$ Bits.

Theorem

Die Laufzeit eines Pivotschrittes ist polynomiell beschränkt in der Eingabelänge.

Symbolische Perturbierung

- Die Perturbierung vergrößert die Laufzeit doch erheblich.

Symbolische Perturbierung

- Die Perturbierung vergrößert die Laufzeit doch erheblich.
- Daher führen wird die Perturbierung symbolisch durch.

Symbolische Perturbierung

- Die Perturbierung vergrößert die Laufzeit doch erheblich.
- Daher führen wird die Perturbierung symbolisch durch.
- Sei $A' = A_\delta^{-1}$, $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, und $\hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$.

Symbolische Perturbierung

- Die Perturbierung vergrößert die Laufzeit doch erheblich.
- Daher führen wird die Perturbierung symbolisch durch.
- Sei $A' = A_\delta^{-1}$, $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, und $\hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$.
- Sei j der Index der Eingangspivotspalte.

Symbolische Perturbierung

- Die Perturbierung vergrößert die Laufzeit doch erheblich.
- Daher führen wird die Perturbierung symbolisch durch.
- Sei $A' = A_\delta^{-1}$, $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, und $\hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$.
- Sei j der Index der Eingangspivotspalte.
- $\delta(i)$ soll die Ausgangspivotspalte werden. Wähle diese wie folgt:

$$\begin{aligned} i &= \operatorname{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m} \left\{ \frac{\hat{b}_k + \sum_{t=1}^{m} a'_{i,t} \cdot \varepsilon^t}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0 \right\} \\ &= \operatorname{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m} \left\{ \frac{p_{\delta,k}(\varepsilon)}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Symbolische Perturbierung

- Die Perturbierung vergrößert die Laufzeit doch erheblich.
- Daher führen wird die Perturbierung symbolisch durch.
- Sei $A' = A_\delta^{-1}$, $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, und $\hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$.
- Sei j der Index der Eingangspivotspalte.
- $\delta(i)$ soll die Ausgangspivotspalte werden. Wähle diese wie folgt:

$$\begin{aligned} i &= \operatorname{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m} \left\{ \frac{\hat{b}_k + \sum_{t=1}^{m} a'_{i,t} \cdot \varepsilon^t}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0 \right\} \\ &= \operatorname{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m} \left\{ \frac{p_{\delta,k}(\varepsilon)}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0 \right\}. \end{aligned}$$

- Nutze dazu ein $\varepsilon \in (0, \gamma)$.

Symbolische Perturbierung

- Die Perturbierung vergrößert die Laufzeit doch erheblich.
- Daher führen wird die Perturbierung symbolisch durch.
- Sei $A' = A_\delta^{-1}$, $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, und $\hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$.
- Sei j der Index der Eingangspivotspalte.
- $\delta(i)$ soll die Ausgangspivotspalte werden. Wähle diese wie folgt:

$$\begin{aligned} i &= \operatorname{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m} \left\{ \frac{\hat{b}_k + \sum_{t=1}^{m} a'_{i,t} \cdot \varepsilon^t}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0 \right\} \\ &= \operatorname{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m} \left\{ \frac{p_{\delta,k}(\varepsilon)}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0 \right\}. \end{aligned}$$

- Nutze dazu ein $\varepsilon \in (0, \gamma)$.
- Zur Bestimmung der Ausgangspivotspalte wählen wir:

$$i = \lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m} \left\{ \frac{p_{\delta,k}(\varepsilon)}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0 \right\}.$$

Symbolische Perturbierung

- Die Perturbierung vergrößert die Laufzeit doch erheblich.
- Daher führen wird die Perturbierung symbolisch durch.
- Sei $A' = A_\delta^{-1}$, $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, und $\hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$.
- Sei j der Index der Eingangspivotspalte.
- $\delta(i)$ soll die Ausgangspivotspalte werden. Wähle diese wie folgt:

$$\begin{aligned} i &= \operatorname{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m} \left\{ \frac{\hat{b}_k + \sum_{t=1}^{m} a'_{i,t} \cdot \varepsilon^t}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0 \right\} \\ &= \operatorname{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m} \left\{ \frac{p_{\delta,k}(\varepsilon)}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0 \right\}. \end{aligned}$$

- Nutze dazu ein $\varepsilon \in (0, \gamma)$.
- Zur Bestimmung der Ausgangspivotspalte wählen wir:

$$i = \lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m} \left\{ \frac{p_{\delta,k}(\varepsilon)}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0 \right\}.$$

- Das kleinste der Polynome kann nun über Koeffizientenvergleich ausgewählt werden.

Symbolische Perturbierung

- Die Perturbierung vergrößert die Laufzeit doch erheblich.
- Daher führen wird die Perturbierung symbolisch durch.
- Sei $A' = A_\delta^{-1}$, $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, und $\hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$.
- Sei j der Index der Eingangspivotspalte.
- $\delta(i)$ soll die Ausgangspivotspalte werden. Wähle diese wie folgt:

$$\begin{aligned} i &= \operatorname{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m} \left\{ \frac{\hat{b}_k + \sum_{t=1}^{m} a'_{i,t} \cdot \varepsilon^t}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0 \right\} \\ &= \operatorname{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m} \left\{ \frac{p_{\delta,k}(\varepsilon)}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0 \right\}. \end{aligned}$$

- Nutze dazu ein $\varepsilon \in (0, \gamma)$.
- Zur Bestimmung der Ausgangspivotspalte wählen wir:

$$i = \lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m} \left\{ \frac{p_{\delta,k}(\varepsilon)}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0 \right\}.$$

- Das kleinste der Polynome kann nun über Koeffizientenvergleich ausgewählt werden.
- Bei dieser Methode muss zusätzlich die Matrix A' mitgeführt werden.

Symbolische Perturbierung

- Die Perturbierung vergrößert die Laufzeit doch erheblich.
- Daher führen wird die Perturbierung symbolisch durch.
- Sei $A' = A_\delta^{-1}$, $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, und $\hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$.
- Sei j der Index der Eingangspivotspalte.
- $\delta(i)$ soll die Ausgangspivotspalte werden. Wähle diese wie folgt:

$$\begin{aligned} i &= \operatorname{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m} \left\{ \frac{\hat{b}_k + \sum_{t=1}^{m} a'_{i,t} \cdot \varepsilon^t}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0 \right\} \\ &= \operatorname{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m} \left\{ \frac{p_{\delta,k}(\varepsilon)}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0 \right\}. \end{aligned}$$

- Nutze dazu ein $\varepsilon \in (0, \gamma)$.
- Zur Bestimmung der Ausgangspivotspalte wählen wir:

$$i = \lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m} \left\{ \frac{p_{\delta,k}(\varepsilon)}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0 \right\}.$$

- Das kleinste der Polynome kann nun über Koeffizientenvergleich ausgewählt werden.
- Bei dieser Methode muss zusätzlich die Matrix A' mitgeführt werden.

Beispiel

- Maximiere: $5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2$ unter den Nebenbedingungen:

$$x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4, \quad x_1 + x_2 \leqslant 2, \text{ und } x_1, x_2 \geqslant 0.$$

Beispiel

- Maximiere: $5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2$ unter den Nebenbedingungen:

$$x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4, \; x_1 + x_2 \leqslant 2, \text{ und } x_1, x_2 \geqslant 0.$$

- Einfache obere Schranke: $5 \cdot x_1 + 17 \cdot x_2 \leqslant 18$, gewonnen aus:

$$4 \cdot (x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4) \text{ plus } x_1 + x_2 \leqslant 2.$$

Beispiel

- Maximiere: $5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2$ unter den Nebenbedingungen:

$$x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4, \; x_1 + x_2 \leqslant 2, \text{ und } x_1, x_2 \geqslant 0.$$

- Einfache obere Schranke: $5 \cdot x_1 + 17 \cdot x_2 \leqslant 18$, gewonnen aus:

$$4 \cdot (x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4) \text{ plus } x_1 + x_2 \leqslant 2.$$

- Weitere einfache obere Schranke: $5 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 \leqslant 14$, gewonnen aus:

$$2 \cdot (x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4) \text{ plus } 3 \cdot (x_1 + x_2 \leqslant 2).$$

Beispiel

- Maximiere: $5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2$ unter den Nebenbedingungen:

$$x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4,\ x_1 + x_2 \leqslant 2,\ \text{und } x_1, x_2 \geqslant 0.$$

- Einfache obere Schranke: $5 \cdot x_1 + 17 \cdot x_2 \leqslant 18$, gewonnen aus:

$$4 \cdot (x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4) \text{ plus } x_1 + x_2 \leqslant 2.$$

- Weitere einfache obere Schranke: $5 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 \leqslant 14$, gewonnen aus:

$$2 \cdot (x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4) \text{ plus } 3 \cdot (x_1 + x_2 \leqslant 2).$$

- Rezept für obere Schranke: Bestimme y_1, y_2 mit $y_1 + y_2 \geqslant 5$ und $4 \cdot y_1 + y_2 \geqslant 7$ und addiere:

$$y_1 \cdot x_1 + y_1 \cdot 4 \cdot x_2 \leqslant y_1 \cdot 4 \text{ plus } y_2 \cdot x_1 + y_2 \cdot x_2 \leqslant y_2 \cdot 2.$$

Beispiel

- Maximiere: $5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2$ unter den Nebenbedingungen:

$$x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4,\; x_1 + x_2 \leqslant 2, \text{ und } x_1, x_2 \geqslant 0.$$

- Einfache obere Schranke: $5 \cdot x_1 + 17 \cdot x_2 \leqslant 18$, gewonnen aus:

$$4 \cdot (x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4) \text{ plus } x_1 + x_2 \leqslant 2.$$

- Weitere einfache obere Schranke: $5 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 \leqslant 14$, gewonnen aus:

$$2 \cdot (x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4) \text{ plus } 3 \cdot (x_1 + x_2 \leqslant 2).$$

- Rezept für obere Schranke: Bestimme y_1, y_2 mit $y_1 + y_2 \geqslant 5$ und $4 \cdot y_1 + y_2 \geqslant 7$ und addiere:

$$y_1 \cdot x_1 + y_1 \cdot 4 \cdot x_2 \leqslant y_1 \cdot 4 \text{ plus } y_2 \cdot x_1 + y_2 \cdot x_2 \leqslant y_2 \cdot 2.$$

- Damit haben wir ein Ungleichungssystem zum Bestimmen einer kleinsten oberen Schranke, d.h.:

Beispiel

- Maximiere: $5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2$ unter den Nebenbedingungen:

$$x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4,\ x_1 + x_2 \leqslant 2, \text{ und } x_1, x_2 \geqslant 0.$$

- Einfache obere Schranke: $5 \cdot x_1 + 17 \cdot x_2 \leqslant 18$, gewonnen aus:

$$4 \cdot (x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4) \text{ plus } x_1 + x_2 \leqslant 2.$$

- Weitere einfache obere Schranke: $5 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 \leqslant 14$, gewonnen aus:

$$2 \cdot (x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4) \text{ plus } 3 \cdot (x_1 + x_2 \leqslant 2).$$

- Rezept für obere Schranke: Bestimme y_1, y_2 mit $y_1 + y_2 \geqslant 5$ und $4 \cdot y_1 + y_2 \geqslant 7$ und addiere:

$$y_1 \cdot x_1 + y_1 \cdot 4 \cdot x_2 \leqslant y_1 \cdot 4 \text{ plus } y_2 \cdot x_1 + y_2 \cdot x_2 \leqslant y_2 \cdot 2.$$

- Damit haben wir ein Ungleichungssystem zum Bestimmen einer kleinsten oberen Schranke, d.h.:
- Minimiere $4 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2$ unter den Nebenbedingungen:

$$y_1 + y_2 \geqslant 5,\ 4 \cdot y_1 + y_2 \geqslant 7, \text{ und } y_1, y_2 \geqslant 0.$$

Beispiel

- Maximiere: $5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2$ unter den Nebenbedingungen:

$$x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4,\ x_1 + x_2 \leqslant 2, \text{ und } x_1, x_2 \geqslant 0.$$

- Einfache obere Schranke: $5 \cdot x_1 + 17 \cdot x_2 \leqslant 18$, gewonnen aus:

$$4 \cdot (x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4) \text{ plus } x_1 + x_2 \leqslant 2.$$

- Weitere einfache obere Schranke: $5 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 \leqslant 14$, gewonnen aus:

$$2 \cdot (x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4) \text{ plus } 3 \cdot (x_1 + x_2 \leqslant 2).$$

- Rezept für obere Schranke: Bestimme y_1, y_2 mit $y_1 + y_2 \geqslant 5$ und $4 \cdot y_1 + y_2 \geqslant 7$ und addiere:

$$y_1 \cdot x_1 + y_1 \cdot 4 \cdot x_2 \leqslant y_1 \cdot 4 \text{ plus } y_2 \cdot x_1 + y_2 \cdot x_2 \leqslant y_2 \cdot 2.$$

- Damit haben wir ein Ungleichungssystem zum Bestimmen einer kleinsten oberen Schranke, d.h.:
- Minimiere $4 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2$ unter den Nebenbedingungen:

$$y_1 + y_2 \geqslant 5,\ 4 \cdot y_1 + y_2 \geqslant 7, \text{ und } y_1, y_2 \geqslant 0.$$

Definition

Definition

Gegeben sei ein LP (im Weiteren das primale LP) mit n Variablen und m Nebenbedingungen in kanonischer Form:

$$\text{Maximiere } c^T x \text{ unter } Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0.$$

Definition

Definition

Gegeben sei ein LP (im Weiteren das primale LP) mit n Variablen und m Nebenbedingungen in kanonischer Form:

$$\text{Maximiere } c^T x \text{ unter } Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0.$$

Definition

Definition

Gegeben sei ein LP (im Weiteren das primale LP) mit n Variablen und m Nebenbedingungen in kanonischer Form:

$$\text{Maximiere } c^T x \text{ unter } Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0.$$

Das duale LP hat m Variablem und n Nebenbedingungen und die Form:

$$\text{Minimiere } y^T b \text{ unter } y^T A \geqslant c^T,\ y \geqslant 0.$$

Definition

Definition

Gegeben sei ein LP (im Weiteren das primale LP) mit n Variablen und m Nebenbedingungen in kanonischer Form:

$$\text{Maximiere } c^T x \text{ unter } Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0.$$

Das duale LP hat m Variablem und n Nebenbedingungen und die Form:

$$\text{Minimiere } y^T b \text{ unter } y^T A \geqslant c^T,\ y \geqslant 0.$$

Äquivalente Schreibweise: Minimiere $b^T y$ unter $A^T y \geqslant c$, $y \geqslant 0$.

- Aus den n Variablen des primalen LP werden n Nebenbedingungen des dualen LPs.

Definition

Definition

Gegeben sei ein LP (im Weiteren das primale LP) mit n Variablen und m Nebenbedingungen in kanonischer Form:

$$\text{Maximiere } c^T x \text{ unter } Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0.$$

Das duale LP hat m Variablem und n Nebenbedingungen und die Form:

$$\text{Minimiere } y^T b \text{ unter } y^T A \geqslant c^T,\ y \geqslant 0.$$

Äquivalente Schreibweise: Minimiere $b^T y$ unter $A^T y \geqslant c$, $y \geqslant 0$.

- Aus den n Variablen des primalen LP werden n Nebenbedingungen des dualen LPs.
- Aus den m Nebenbedingungen des primalen LP werden m Variablen des dualen LPs.

Definition

Definition

Gegeben sei ein LP (im Weiteren das primale LP) mit n Variablen und m Nebenbedingungen in kanonischer Form:

$$\text{Maximiere } c^T x \text{ unter } Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0.$$

Das duale LP hat m Variablem und n Nebenbedingungen und die Form:

$$\text{Minimiere } y^T b \text{ unter } y^T A \geqslant c^T,\ y \geqslant 0.$$

Äquivalente Schreibweise: Minimiere $b^T y$ unter $A^T y \geqslant c$, $y \geqslant 0$.

- Aus den n Variablen des primalen LP werden n Nebenbedingungen des dualen LPs.
- Aus den m Nebenbedingungen des primalen LP werden m Variablen des dualen LPs.

Dual von Dual

primal: $c^T x : Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$, **dual**: $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$

Theorem

Das duale LP des dualen LP ist das primale LP.

Beweis:

Dual von Dual

primal: $c^T x : Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$, **dual**: $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$

Theorem

Das duale LP des dualen LP ist das primale LP.

Beweis:

Dual von Dual

Theorem

Das duale LP des dualen LP ist das primale LP.

Beweis:

- Primale LP:
  Maximiere $c^T x$ unter $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$.

Dual von Dual

Theorem

Das duale LP des dualen LP ist das primale LP.

Beweis:

- Primale LP:
  Maximiere $c^T x$ unter $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$.
- Duale LP:
  Minimiere $b^T y$ unter $A^T y \geqslant c$, $y \geqslant 0$.

Dual von Dual

Theorem

Das duale LP des dualen LP ist das primale LP.

Beweis:

- Primale LP:
  Maximiere $c^T x$ unter $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$.
- Duale LP:
  Minimiere $b^T y$ unter $A^T y \geqslant c$, $y \geqslant 0$.
- Duale LP in kanonischer Form:
  Maximiere $-b^T y$ unter $-A^T y \leqslant -c$, $y \geqslant 0$.

Dual von Dual

Theorem

Das duale LP des dualen LP ist das primale LP.

Beweis:

- Primale LP:
  Maximiere c^Tx unter $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$.
- Duale LP:
  Minimiere b^Ty unter $A^Ty \geqslant c$, $y \geqslant 0$.
- Duale LP in kanonischer Form:
  Maximiere $-b^Ty$ unter $-A^Ty \leqslant -c$, $y \geqslant 0$.
- Davon wieder das duale LP:
  Minimiere $-c^Tx$ unter $-Ax \geqslant -b$, $x \geqslant 0$.

Dual von Dual

Theorem

Das duale LP des dualen LP ist das primale LP.

Beweis:

- Primale LP:
  Maximiere $c^T x$ unter $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$.
- Duale LP:
  Minimiere $b^T y$ unter $A^T y \geqslant c$, $y \geqslant 0$.
- Duale LP in kanonischer Form:
  Maximiere $-b^T y$ unter $-A^T y \leqslant -c$, $y \geqslant 0$.
- Davon wieder das duale LP:
  Minimiere $-c^T x$ unter $-Ax \geqslant -b$, $x \geqslant 0$.
- Das wieder in kanonische Form gebracht:
  Maximiere $c^T x$ unter $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$.

Dual von Dual

Theorem

Das duale LP des dualen LP ist das primale LP.

Beweis:

- Primale LP:
  Maximiere $c^T x$ unter $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$.
- Duale LP:
  Minimiere $b^T y$ unter $A^T y \geqslant c$, $y \geqslant 0$.
- Duale LP in kanonischer Form:
  Maximiere $-b^T y$ unter $-A^T y \leqslant -c$, $y \geqslant 0$.
- Davon wieder das duale LP:
  Minimiere $-c^T x$ unter $-Ax \geqslant -b$, $x \geqslant 0$.
- Das wieder in kanonische Form gebracht:
  Maximiere $c^T x$ unter $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$.

Schwaches Dualitätsprinzip

Theorem

Sei x eine zulässige Lösung für das primale LP und sei y eine zulässige Lösung für das duale LP. Dann gilt $y^T \cdot b \geqslant c^T \cdot x$.

Beweis:

Schwaches Dualitätsprinzip

Theorem

Sei x eine zulässige Lösung für das primale LP und sei y eine zulässige Lösung für das duale LP. Dann gilt $y^T \cdot b \geqslant c^T \cdot x$.

Beweis:

Schwaches Dualitätsprinzip

primal: $c^T x : Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$, **dual**: $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$

Theorem

Sei x eine zulässige Lösung für das primale LP und sei y eine zulässige Lösung für das duale LP. Dann gilt $y^T \cdot b \geqslant c^T \cdot x$.

Beweis:

- Aus der Zulässigkeit folgt jeweils: $x \geqslant 0$ und $y^T A \geqslant c^T$.

Schwaches Dualitätsprinzip

Theorem

Sei x eine zulässige Lösung für das primale LP und sei y eine zulässige Lösung für das duale LP. Dann gilt $y^T \cdot b \geqslant c^T \cdot x$.

Beweis:

- Aus der Zulässigkeit folgt jeweils: $x \geqslant 0$ und $y^T A \geqslant c^T$.
- Damit folgt: $c^T x \leqslant y^T Ax$.

Schwaches Dualitätsprinzip

Theorem

Sei x eine zulässige Lösung für das primale LP und sei y eine zulässige Lösung für das duale LP. Dann gilt $y^T \cdot b \geqslant c^T \cdot x$.

Beweis:

- Aus der Zulässigkeit folgt jeweils: $x \geqslant 0$ und $y^T A \geqslant c^T$.
- Damit folgt: $c^T x \leqslant y^T Ax$.
- Weiter folgt aus der Zulässigkeit: $y \geqslant 0$ und $Ax \leqslant b$.

Schwaches Dualitätsprinzip

Theorem

Sei x eine zulässige Lösung für das primale LP und sei y eine zulässige Lösung für das duale LP. Dann gilt $y^T \cdot b \geqslant c^T \cdot x$.

Beweis:

- Aus der Zulässigkeit folgt jeweils: $x \geqslant 0$ und $y^T A \geqslant c^T$.
- Damit folgt: $c^T x \leqslant y^T Ax$.
- Weiter folgt aus der Zulässigkeit: $y \geqslant 0$ und $Ax \leqslant b$.
- Damit folgt: $y^T Ax \leqslant y^T b$.

Schwaches Dualitätsprinzip

Theorem

Sei x eine zulässige Lösung für das primale LP und sei y eine zulässige Lösung für das duale LP. Dann gilt $y^T \cdot b \geqslant c^T \cdot x$.

Beweis:

- Aus der Zulässigkeit folgt jeweils: $x \geqslant 0$ und $y^T A \geqslant c^T$.
- Damit folgt: $c^T x \leqslant y^T Ax$.
- Weiter folgt aus der Zulässigkeit: $y \geqslant 0$ und $Ax \leqslant b$.
- Damit folgt: $y^T Ax \leqslant y^T b$.
- Damit gilt: $c^T x \leqslant y^T Ax \leqslant y^T b$.

Schwaches Dualitätsprinzip

Theorem

Sei x eine zulässige Lösung für das primale LP und sei y eine zulässige Lösung für das duale LP. Dann gilt $y^T \cdot b \geqslant c^T \cdot x$.

Beweis:

- Aus der Zulässigkeit folgt jeweils: $x \geqslant 0$ und $y^T A \geqslant c^T$.
- Damit folgt: $c^T x \leqslant y^T Ax$.
- Weiter folgt aus der Zulässigkeit: $y \geqslant 0$ und $Ax \leqslant b$.
- Damit folgt: $y^T Ax \leqslant y^T b$.
- Damit gilt: $c^T x \leqslant y^T Ax \leqslant y^T b$.

Starkes Dualitätsprinzip

primal: $c^T x : Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$, **dual**: $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$

Theorem

Sei x eine optimale Lösung für das primale LP und sei y eine optimale Lösung für das duale LP. Dann gilt $y^T \cdot b = c^T \cdot x$.

Beweis (siehe Literatur/Script):

Starkes Dualitätsprinzip

primal: $c^T x : Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$, **dual**: $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$

Theorem

Sei x eine optimale Lösung für das primale LP und sei y eine optimale Lösung für das duale LP. Dann gilt $y^T \cdot b = c^T \cdot x$.

Beweis (siehe Literatur/Script):

Starkes Dualitätsprinzip

Theorem

Sei x eine optimale Lösung für das primale LP und sei y eine optimale Lösung für das duale LP. Dann gilt $y^T \cdot b = c^T \cdot x$.

Beweis (siehe Literatur/Script):

- Der Beweis ist sogar konstruktiv.

Starkes Dualitätsprinzip

Theorem

Sei x eine optimale Lösung für das primale LP und sei y eine optimale Lösung für das duale LP. Dann gilt $y^T \cdot b = c^T \cdot x$.

Beweis (siehe Literatur/Script):

- Der Beweis ist sogar konstruktiv.
- D.h. eine "primale Lösung" kann in polynomieller Zeit in eine "duale Lösung" überführt werden.

Starkes Dualitätsprinzip

Theorem

Sei x eine optimale Lösung für das primale LP und sei y eine optimale Lösung für das duale LP. Dann gilt $y^T \cdot b = c^T \cdot x$.

Beweis (siehe Literatur/Script):

- Der Beweis ist sogar konstruktiv.
- D.h. eine "primale Lösung" kann in polynomieller Zeit in eine "duale Lösung" überführt werden.

Flussproblem als LP

- Gegeben $G = (V, E, s, t, c)$. Sei $P_{s,t}$ die Menge der einfachen Pfade von s nach t.

Flussproblem als LP

- Gegeben $G = (V, E, s, t, c)$. Sei $P_{s,t}$ die Menge der einfachen Pfade von s nach t.
- Für jeden Pfad $p \in P_{s,t}$ gibt es eine Variable x_p.

Flussproblem als LP

- Gegeben $G = (V, E, s, t, c)$. Sei $P_{s,t}$ die Menge der einfachen Pfade von s nach t.
- Für jeden Pfad $p \in P_{s,t}$ gibt es eine Variable x_p.
- Das primale LP lautet: Maximiere $\sum_{p \in P_{s,t}} x_p$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{p : e \in p} x_p \leqslant c(e), \ \forall e \in E \text{ und } x_p \geqslant 0, \ \forall p \in P_{s,t}.$$

Flussproblem als LP

- Gegeben $G = (V, E, s, t, c)$. Sei $P_{s,t}$ die Menge der einfachen Pfade von s nach t.
- Für jeden Pfad $p \in P_{s,t}$ gibt es eine Variable x_p.
- Das primale LP lautet: Maximiere $\sum_{p \in P_{s,t}} x_p$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{p:e \in p} x_p \leqslant c(e), \ \forall e \in E \text{ und } x_p \geqslant 0, \ \forall p \in P_{s,t}.$$

- Das duale LP lautet: Minimiere $\sum_{e \in E} c(e) y_e$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{e \in p} y_e \geqslant 1, \ \forall p \in P_{s,t} \text{ und } y_e \geqslant 0, \ \forall e \in E.$$

Flussproblem als LP

- Gegeben $G = (V, E, s, t, c)$. Sei $P_{s,t}$ die Menge der einfachen Pfade von s nach t.
- Für jeden Pfad $p \in P_{s,t}$ gibt es eine Variable x_p.
- Das primale LP lautet: Maximiere $\sum_{p \in P_{s,t}} x_p$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{p:e \in p} x_p \leqslant c(e), \ \forall e \in E \text{ und } x_p \geqslant 0, \ \forall p \in P_{s,t}.$$

- Das duale LP lautet: Minimiere $\sum_{e \in E} c(e) y_e$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{e \in p} y_e \geqslant 1, \ \forall p \in P_{s,t} \text{ und } y_e \geqslant 0, \ \forall e \in E.$$

- Für das duale LP gilt (nach dem folgenden Abschnitt): die Werte von y_e sind aus $\{0, 1\}$.

Flussproblem als LP

- Gegeben $G = (V, E, s, t, c)$. Sei $P_{s,t}$ die Menge der einfachen Pfade von s nach t.
- Für jeden Pfad $p \in P_{s,t}$ gibt es eine Variable x_p.
- Das primale LP lautet: Maximiere $\sum_{p \in P_{s,t}} x_p$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{p: e \in p} x_p \leqslant c(e), \ \forall e \in E \text{ und } x_p \geqslant 0, \ \forall p \in P_{s,t}.$$

- Das duale LP lautet: Minimiere $\sum_{e \in E} c(e) y_e$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{e \in p} y_e \geqslant 1, \ \forall p \in P_{s,t} \text{ und } y_e \geqslant 0, \ \forall e \in E.$$

- Für das duale LP gilt (nach dem folgenden Abschnitt): die Werte von y_e sind aus $\{0, 1\}$.
- Das duale LP entspricht dem Finden eines minimalen Schnitts zwischen s und t.

Flussproblem als LP

- Gegeben $G = (V, E, s, t, c)$. Sei $P_{s,t}$ die Menge der einfachen Pfade von s nach t.
- Für jeden Pfad $p \in P_{s,t}$ gibt es eine Variable x_p.
- Das primale LP lautet: Maximiere $\sum_{p \in P_{s,t}} x_p$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{p:e \in p} x_p \leqslant c(e), \ \forall e \in E \text{ und } x_p \geqslant 0, \ \forall p \in P_{s,t}.$$

- Das duale LP lautet: Minimiere $\sum_{e \in E} c(e) y_e$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{e \in p} y_e \geqslant 1, \ \forall p \in P_{s,t} \text{ und } y_e \geqslant 0, \ \forall e \in E.$$

- Für das duale LP gilt (nach dem folgenden Abschnitt): die Werte von y_e sind aus $\{0, 1\}$.
- Das duale LP entspricht dem Finden eines minimalen Schnitts zwischen s und t.

Relaxiertes Matching

- Gegeben $G = (V, E)$.

Relaxiertes Matching

- Gegeben $G = (V, E)$.
- Für jede Kante $e \in E$ gibt es Variable x_e.

Relaxiertes Matching

- Gegeben $G = (V, E)$.
- Für jede Kante $e \in E$ gibt es Variable x_e.
- Das primale LP lautet: Maximiere $\sum_{e \in E} x_e$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{v \in e} x_e \leqslant 1, \ \forall v \in V \text{ und } x_e \geqslant 0, \ \forall e \in E.$$

Relaxiertes Matching

- Gegeben $G = (V, E)$.
- Für jede Kante $e \in E$ gibt es Variable x_e.
- Das primale LP lautet: Maximiere $\sum_{e \in E} x_e$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{v \in e} x_e \leqslant 1,\ \forall v \in V \text{ und } x_e \geqslant 0,\ \forall e \in E.$$

- Das duale LP lautet: Minimiere $\sum_{v \in V} y_v$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{v \in e} y_v \geqslant 1,\ \forall e \in E \text{ und } y_v \geqslant 0,\ \forall v \in V.$$

Relaxiertes Matching

- Gegeben $G = (V, E)$.
- Für jede Kante $e \in E$ gibt es Variable x_e.
- Das primale LP lautet: Maximiere $\sum_{e \in E} x_e$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{v \in e} x_e \leqslant 1, \ \forall v \in V \text{ und } x_e \geqslant 0, \ \forall e \in E.$$

- Das duale LP lautet: Minimiere $\sum_{v \in V} y_v$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{v \in e} y_v \geqslant 1, \ \forall e \in E \text{ und } y_v \geqslant 0, \ \forall v \in V.$$

- Das duale LP entspricht einem relaxierten Vertex-Cover-Problem.

Relaxiertes Matching

- Gegeben $G = (V, E)$.
- Für jede Kante $e \in E$ gibt es Variable x_e.
- Das primale LP lautet: Maximiere $\sum_{e \in E} x_e$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{v \in e} x_e \leqslant 1,\ \forall v \in V \text{ und } x_e \geqslant 0,\ \forall e \in E.$$

- Das duale LP lautet: Minimiere $\sum_{v \in V} y_v$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{v \in e} y_v \geqslant 1,\ \forall e \in E \text{ und } y_v \geqslant 0,\ \forall v \in V.$$

- Das duale LP entspricht einem relaxierten Vertex-Cover-Problem.
- Aber hier liegt eine Ganzzahligkeit der Lösungen nur auf bipartiten Graphen vor.

Relaxiertes Matching

- Gegeben $G = (V, E)$.
- Für jede Kante $e \in E$ gibt es Variable x_e.
- Das primale LP lautet: Maximiere $\sum_{e \in E} x_e$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{v \in e} x_e \leqslant 1, \ \forall v \in V \text{ und } x_e \geqslant 0, \ \forall e \in E.$$

- Das duale LP lautet: Minimiere $\sum_{v \in V} y_v$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{v \in e} y_v \geqslant 1, \ \forall e \in E \text{ und } y_v \geqslant 0, \ \forall v \in V.$$

- Das duale LP entspricht einem relaxierten Vertex-Cover-Problem.
- Aber hier liegt eine Ganzzahligkeit der Lösungen nur auf bipartiten Graphen vor.
- Somit sind bipartites Matching und Vertex-Cover auf bipartiten Graphen dual zueinander.

Relaxiertes Matching

- Gegeben $G = (V, E)$.
- Für jede Kante $e \in E$ gibt es Variable x_e.
- Das primale LP lautet: Maximiere $\sum_{e \in E} x_e$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{v \in e} x_e \leqslant 1, \ \forall v \in V \text{ und } x_e \geqslant 0, \ \forall e \in E.$$

- Das duale LP lautet: Minimiere $\sum_{v \in V} y_v$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{v \in e} y_v \geqslant 1, \ \forall e \in E \text{ und } y_v \geqslant 0, \ \forall v \in V.$$

- Das duale LP entspricht einem relaxierten Vertex-Cover-Problem.
- Aber hier liegt eine Ganzzahligkeit der Lösungen nur auf bipartiten Graphen vor.
- Somit sind bipartites Matching und Vertex-Cover auf bipartiten Graphen dual zueinander.

Beispiele

primal: $c^T x : Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$, **dual**: $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$

- ILPs (Integer Linear Programs) unterscheiden sich nur von LPs dadurch, dass die Variablen aus $\mathbb{N}$ sein müssen.

Beispiele

- ILPs (Integer Linear Programs) unterscheiden sich nur von LPs dadurch, dass die Variablen aus $\mathbb{N}$ sein müssen.
- Rucksackproblem: Gegeben d Objekte mit Gewichten g_i und Nutzen v_i für $1 \leqslant i \leqslant d$. Weiter sei G die Gewichtsschranke des Rucksacks.

Beispiele

- ILPs (Integer Linear Programs) unterscheiden sich nur von LPs dadurch, dass die Variablen aus $\mathbb{N}$ sein müssen.
- Rucksackproblem: Gegeben d Objekte mit Gewichten g_i und Nutzen v_i für $1 \leqslant i \leqslant d$. Weiter sei G die Gewichtsschranke des Rucksacks.
- Maximiere $\sum_{i=1}^{d} v_i \cdot x_i$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{i=1}^{d} g_i \cdot x_i \leqslant G, \ \forall i : 1 \leqslant i \leqslant d : x_i \in \{0,1\}.$$

Beispiele

- ILPs (Integer Linear Programs) unterscheiden sich nur von LPs dadurch, dass die Variablen aus $\mathbb{N}$ sein müssen.
- Rucksackproblem: Gegeben d Objekte mit Gewichten g_i und Nutzen v_i für $1 \leqslant i \leqslant d$. Weiter sei G die Gewichtsschranke des Rucksacks.
- Maximiere $\sum_{i=1}^{d} v_i \cdot x_i$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{i=1}^{d} g_i \cdot x_i \leqslant G, \ \forall i : 1 \leqslant i \leqslant d : x_i \in \{0, 1\}.$$

- Gewichtetes Matchingproblem: Gegeben $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $w_e, e \in E$.

Beispiele

- ILPs (Integer Linear Programs) unterscheiden sich nur von LPs dadurch, dass die Variablen aus $\mathbb{N}$ sein müssen.
- Rucksackproblem: Gegeben d Objekte mit Gewichten g_i und Nutzen v_i für $1 \leqslant i \leqslant d$. Weiter sei G die Gewichtsschranke des Rucksacks.
- Maximiere $\sum_{i=1}^{d} v_i \cdot x_i$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{i=1}^{d} g_i \cdot x_i \leqslant G, \ \forall i : 1 \leqslant i \leqslant d : x_i \in \{0, 1\}.$$

- Gewichtetes Matchingproblem: Gegeben $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $w_e, e \in E$.
- Maximiere $\sum_{e \in E} w_e \cdot x_e$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{e \in E : v \in e} x_e \leqslant 1, \ \forall v \in V \text{ und } x_e \in \{0, 1\}, \ \forall e \in E.$$

Beispiele

primal: $c^T x : Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$, **dual**: $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$

- ILPs (Integer Linear Programs) unterscheiden sich nur von LPs dadurch, dass die Variablen aus $\mathbb{N}$ sein müssen.
- Rucksackproblem: Gegeben d Objekte mit Gewichten g_i und Nutzen v_i für $1 \leqslant i \leqslant d$. Weiter sei G die Gewichtsschranke des Rucksacks.
- Maximiere $\sum_{i=1}^{d} v_i \cdot x_i$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{i=1}^{d} g_i \cdot x_i \leqslant G, \ \forall i : 1 \leqslant i \leqslant d : x_i \in \{0,1\}.$$

- Gewichtetes Matchingproblem: Gegeben $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $w_e, e \in E$.
- Maximiere $\sum_{e \in E} w_e \cdot x_e$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{e \in E : v \in e} x_e \leqslant 1, \ \forall v \in V \text{ und } x_e \in \{0,1\}, \ \forall e \in E.$$

- Das Rucksackproblem ist NP-hart, aber das gewichtete Matchingproblem ist in $\mathcal{P}$.

Beispiele

- ILPs (Integer Linear Programs) unterscheiden sich nur von LPs dadurch, dass die Variablen aus $\mathbb{N}$ sein müssen.
- Rucksackproblem: Gegeben d Objekte mit Gewichten g_i und Nutzen v_i für $1 \leqslant i \leqslant d$. Weiter sei G die Gewichtsschranke des Rucksacks.
- Maximiere $\sum_{i=1}^{d} v_i \cdot x_i$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{i=1}^{d} g_i \cdot x_i \leqslant G, \ \forall i : 1 \leqslant i \leqslant d : x_i \in \{0,1\}.$$

- Gewichtetes Matchingproblem: Gegeben $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $w_e, e \in E$.
- Maximiere $\sum_{e \in E} w_e \cdot x_e$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{e \in E : v \in e} x_e \leqslant 1, \ \forall v \in V \text{ und } x_e \in \{0,1\}, \ \forall e \in E.$$

- Das Rucksackproblem ist NP-hart, aber das gewichtete Matchingproblem ist in $\mathcal{P}$.
- Wir untersuchen im Folgenden, wann ein ILP in $\mathcal{P}$ liegt.

Beispiele

primal: $c^T x : Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$, **dual**: $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$

- ILPs (Integer Linear Programs) unterscheiden sich nur von LPs dadurch, dass die Variablen aus $\mathbb{N}$ sein müssen.
- Rucksackproblem: Gegeben d Objekte mit Gewichten g_i und Nutzen v_i für $1 \leqslant i \leqslant d$. Weiter sei G die Gewichtsschranke des Rucksacks.
- Maximiere $\sum_{i=1}^{d} v_i \cdot x_i$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{i=1}^{d} g_i \cdot x_i \leqslant G, \ \forall i : 1 \leqslant i \leqslant d : x_i \in \{0,1\}.$$

- Gewichtetes Matchingproblem: Gegeben $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $w_e, e \in E$.
- Maximiere $\sum_{e \in E} w_e \cdot x_e$ unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{e \in E : v \in e} x_e \leqslant 1, \ \forall v \in V \text{ und } x_e \in \{0,1\}, \ \forall e \in E.$$

- Das Rucksackproblem ist NP-hart, aber das gewichtete Matchingproblem ist in $\mathcal{P}$.
- Wir untersuchen im Folgenden, wann ein ILP in $\mathcal{P}$ liegt.

Unimodularität

primal: $c^T x : Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$, **dual**: $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$

Definition

Unimodularität

primal: $c^T x : Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$, **dual**: $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$

Definition

- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt unimodular, falls ihre Determinante 1 oder -1 ist.

Unimodularität

primal: $c^T x : Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$, **dual**: $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$

Definition

- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt unimodular, falls ihre Determinante 1 oder -1 ist.
- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt total unimodular, falls jede quadratische <u>reguläre</u> Teilmatrix unimodular ist.

Unimodularität

primal: $c^T x : Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$, dual: $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$

Definition

- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt unimodular, falls ihre Determinante 1 oder -1 ist.
- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt total unimodular, falls jede quadratische reguläre Teilmatrix unimodular ist.

Unimodularität

primal: $c^T x : Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$, **dual:** $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$

Definition

- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt unimodular, falls ihre Determinante 1 oder -1 ist.
- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt total unimodular, falls jede quadratische <u>reguläre</u> Teilmatrix unimodular ist.

Theorem

Sei A total unimodular. Dann sind alle Basislösungen von $A \cdot x = b$ ganzzahlig.

Beweis:

Unimodularität

Definition

- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt unimodular, falls ihre Determinante 1 oder -1 ist.
- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt total unimodular, falls jede quadratische reguläre Teilmatrix unimodular ist.

Theorem

Sei A total unimodular. Dann sind alle Basislösungen von $A \cdot x = b$ ganzzahlig.

Beweis:

Unimodularität

Definition

- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt unimodular, falls ihre Determinante 1 oder -1 ist.
- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt total unimodular, falls jede quadratische reguläre Teilmatrix unimodular ist.

Theorem

Sei A total unimodular. Dann sind alle Basislösungen von $A \cdot x = b$ ganzzahlig.

Beweis:

- Sei δ Basis von A. Die Basislösung ergibt sich aus $A_\delta \cdot x_\delta = b$.

Unimodularität

Definition

- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt unimodular, falls ihre Determinante 1 oder -1 ist.
- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt total unimodular, falls jede quadratische reguläre Teilmatrix unimodular ist.

Theorem

Sei A total unimodular. Dann sind alle Basislösungen von $A \cdot x = b$ ganzzahlig.

Beweis:

- Sei δ Basis von A. Die Basislösung ergibt sich aus $A_\delta \cdot x_\delta = b$.
- A_δ ist dabei eine quadratische Teilmatrix.

Unimodularität

primal: $c^T x : Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$, **dual**: $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$

Definition

- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt unimodular, falls ihre Determinante 1 oder -1 ist.
- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt total unimodular, falls jede quadratische <u>reguläre</u> Teilmatrix unimodular ist.

Theorem

Sei A total unimodular. Dann sind alle Basislösungen von $A \cdot x = b$ ganzzahlig.

Beweis:

- Sei δ Basis von A. Die Basislösung ergibt sich aus $A_\delta \cdot x_\delta = b$.
- A_δ ist dabei eine quadratische Teilmatrix.
- Damit folgt die Aussage nach der Cramerschen Regel:

$$x_{\delta(i)} = \frac{\det(A_{\delta(1)}, \ldots, A_{\delta(i-1)}, b, A_{\delta(i+1)} \ldots, A_{\delta(k)})}{\det(A_\delta)}.$$

Unimodularität

Definition

- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt unimodular, falls ihre Determinante 1 oder -1 ist.
- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt total unimodular, falls jede quadratische reguläre Teilmatrix unimodular ist.

Theorem

Sei A total unimodular. Dann sind alle Basislösungen von $A \cdot x = b$ ganzzahlig.

Beweis:

- Sei δ Basis von A. Die Basislösung ergibt sich aus $A_\delta \cdot x_\delta = b$.
- A_δ ist dabei eine quadratische Teilmatrix.
- Damit folgt die Aussage nach der Cramerschen Regel:

$$x_{\delta(i)} = \frac{\det(A_{\delta(1)}, \ldots, A_{\delta(i-1)}, b, A_{\delta(i+1)} \ldots, A_{\delta(k)})}{\det(A_\delta)}.$$

LPs

Theorem

Sei A total unimodular. Dann sind alle Basislösungen von dem LP $A \cdot x \leqslant b$ ganzzahlig.

LPs

Theorem

Sei A total unimodular. Dann sind alle Basislösungen von dem LP $A \cdot x \leqslant b$ ganzzahlig.

- Sei m die Anzahl der Zeilen von A.

LPs

Theorem

Sei A total unimodular. Dann sind alle Basislösungen von dem LP $A \cdot x \leqslant b$ ganzzahlig.

- Sei m die Anzahl der Zeilen von A.
- Mit Schlupfvariablen erhalten wir ein LP in Gleichungsform: $(A \mid E_m)$.

LPs

Theorem

Sei A total unimodular. Dann sind alle Basislösungen von dem LP $A \cdot x \leqslant b$ ganzzahlig.

- Sei m die Anzahl der Zeilen von A.
- Mit Schlupfvariablen erhalten wir ein LP in Gleichungsform: $(A \mid E_m)$.
- Wir zeigen nun, dass $(A \mid E_m)$ total unimodular ist.

LPs

Theorem

Sei A total unimodular. Dann sind alle Basislösungen von dem LP $A \cdot x \leqslant b$ ganzzahlig.

- Sei m die Anzahl der Zeilen von A.
- Mit Schlupfvariablen erhalten wir ein LP in Gleichungsform: $(A \mid E_m)$.
- Wir zeigen nun, dass $(A \mid E_m)$ total unimodular ist.
- Sei C beliebige quadratische Teilmatrix von $(A \mid E_m)$.

LPs

Theorem

Sei A total unimodular. Dann sind alle Basislösungen von dem LP $A \cdot x \leqslant b$ ganzzahlig.

- Sei m die Anzahl der Zeilen von A.
- Mit Schlupfvariablen erhalten wir ein LP in Gleichungsform: $(A \mid E_m)$.
- Wir zeigen nun, dass $(A \mid E_m)$ total unimodular ist.
- Sei C beliebige quadratische Teilmatrix von $(A \mid E_m)$.
- Wir können C wie folgt umgeformt darstellen:

$$C' = \begin{pmatrix} M & 0 \\ * & E_k \end{pmatrix}.$$

LPs

Theorem

Sei A total unimodular. Dann sind alle Basislösungen von dem LP $A \cdot x \leqslant b$ ganzzahlig.

- Sei m die Anzahl der Zeilen von A.
- Mit Schlupfvariablen erhalten wir ein LP in Gleichungsform: $(A \mid E_m)$.
- Wir zeigen nun, dass $(A \mid E_m)$ total unimodular ist.
- Sei C beliebige quadratische Teilmatrix von $(A \mid E_m)$.
- Wir können C wie folgt umgeformt darstellen:

$$C' = \begin{pmatrix} M & 0 \\ * & E_k \end{pmatrix}.$$

  - Dabei ist E_k eine $k \times k$-Einheitsmatrix.

LPs

Theorem

Sei A total unimodular. Dann sind alle Basislösungen von dem LP $A \cdot x \leqslant b$ ganzzahlig.

- Sei m die Anzahl der Zeilen von A.
- Mit Schlupfvariablen erhalten wir ein LP in Gleichungsform: $(A \mid E_m)$.
- Wir zeigen nun, dass $(A \mid E_m)$ total unimodular ist.
- Sei C beliebige quadratische Teilmatrix von $(A \mid E_m)$.
- Wir können C wie folgt umgeformt darstellen:

$$C' = \begin{pmatrix} M & 0 \\ * & E_k \end{pmatrix}.$$

  - Dabei ist E_k eine $k \times k$-Einheitsmatrix.
  - M ist eine $(m-k) \times (m-k)$-Teilmatrix von A.

LPs

Theorem

Sei A total unimodular. Dann sind alle Basislösungen von dem LP $A \cdot x \leqslant b$ ganzzahlig.

- Sei m die Anzahl der Zeilen von A.
- Mit Schlupfvariablen erhalten wir ein LP in Gleichungsform: $(A \mid E_m)$.
- Wir zeigen nun, dass $(A \mid E_m)$ total unimodular ist.
- Sei C beliebige quadratische Teilmatrix von $(A \mid E_m)$.
- Wir können C wie folgt umgeformt darstellen:

$$C' = \begin{pmatrix} M & 0 \\ * & E_k \end{pmatrix}.$$

  - Dabei ist E_k eine $k \times k$-Einheitsmatrix.
  - M ist eine $(m-k) \times (m-k)$-Teilmatrix von A.
- Es folgt: $|\det(C)| = |\det(C')| = |\det(M)| = 1$.

LPs

Theorem

Sei A total unimodular. Dann sind alle Basislösungen von dem LP $A \cdot x \leqslant b$ ganzzahlig.

- Sei m die Anzahl der Zeilen von A.
- Mit Schlupfvariablen erhalten wir ein LP in Gleichungsform: $(A \mid E_m)$.
- Wir zeigen nun, dass $(A \mid E_m)$ total unimodular ist.
- Sei C beliebige quadratische Teilmatrix von $(A \mid E_m)$.
- Wir können C wie folgt umgeformt darstellen:

$$C' = \begin{pmatrix} M & 0 \\ * & E_k \end{pmatrix}.$$

  - Dabei ist E_k eine $k \times k$-Einheitsmatrix.
  - M ist eine $(m-k) \times (m-k)$-Teilmatrix von A.
- Es folgt: $|\det(C)| = |\det(C')| = |\det(M)| = 1$.
- Damit ist $(A \mid E_m)$ total unimodular.

LPs

Theorem

Sei A total unimodular. Dann sind alle Basislösungen von dem LP $A \cdot x \leqslant b$ ganzzahlig.

- Sei m die Anzahl der Zeilen von A.
- Mit Schlupfvariablen erhalten wir ein LP in Gleichungsform: $(A \mid E_m)$.
- Wir zeigen nun, dass $(A \mid E_m)$ total unimodular ist.
- Sei C beliebige quadratische Teilmatrix von $(A \mid E_m)$.
- Wir können C wie folgt umgeformt darstellen:

$$C' = \begin{pmatrix} M & 0 \\ * & E_k \end{pmatrix}.$$

  - Dabei ist E_k eine $k \times k$-Einheitsmatrix.
  - M ist eine $(m-k) \times (m-k)$-Teilmatrix von A.
- Es folgt: $|\det(C)| = |\det(C')| = |\det(M)| = 1$.
- Damit ist $(A \mid E_m)$ total unimodular.

Eine Eigenschaft für unimodular

primal: $c^T x : Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$, **dual**: $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$

Theorem

Eine Matrix A mit Einträgen aus $\{-1, 0, 1\}$ *ist total unimodular, falls*

Eine Eigenschaft für unimodular

primal: $c^T x : Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$, **dual**: $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$

Theorem

Eine Matrix A mit Einträgen aus $\{-1, 0, 1\}$ *ist total unimodular, falls*

- *nicht mehr als zwei Einträge pro Spalte aus* $\{-1, 1\}$ *sind und*

Eine Eigenschaft für unimodular

Theorem

Eine Matrix A mit Einträgen aus $\{-1, 0, 1\}$ ist total unimodular, falls

- *nicht mehr als zwei Einträge pro Spalte aus $\{-1, 1\}$ sind und*
- *die Zeilen sich in zwei Mengen I_1 und I_2 aufteilen lassen, für die gilt:*

Eine Eigenschaft für unimodular

Theorem

Eine Matrix A mit Einträgen aus $\{-1, 0, 1\}$ ist total unimodular, falls

- *nicht mehr als zwei Einträge pro Spalte aus $\{-1, 1\}$ sind und*
- *die Zeilen sich in zwei Mengen I_1 und I_2 aufteilen lassen, für die gilt:*
  - *Falls eine Spalte zwei unterschiedliche Einträge (-1 und 1) enthält, so sind die zugehörigen Zeilen in der gleichen Menge I_i.*

Eine Eigenschaft für unimodular

Theorem

Eine Matrix A mit Einträgen aus $\{-1, 0, 1\}$ ist total unimodular, falls

- *nicht mehr als zwei Einträge pro Spalte aus $\{-1, 1\}$ sind und*
- *die Zeilen sich in zwei Mengen I_1 und I_2 aufteilen lassen, für die gilt:*
  - *Falls eine Spalte zwei unterschiedliche Einträge (-1 und 1) enthält, so sind die zugehörigen Zeilen in der gleichen Menge I_i.*
  - *Falls eine Spalte zwei Einträge -1 oder zwei Einträge 1 hat, so sind die zugehörigen Zeilen in der unterschiedlichen Mengen I_i.*

Eine Eigenschaft für unimodular

primal: $c^T x : Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$, **dual**: $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$

Theorem

Eine Matrix A mit Einträgen aus $\{-1, 0, 1\}$ ist total unimodular, falls

- *nicht mehr als zwei Einträge pro Spalte aus $\{-1, 1\}$ sind und*
- *die Zeilen sich in zwei Mengen I_1 und I_2 aufteilen lassen, für die gilt:*
  - *Falls eine Spalte zwei unterschiedliche Einträge (-1 und 1) enthält, so sind die zugehörigen Zeilen in der gleichen Menge I_i.*
  - *Falls eine Spalte zwei Einträge -1 oder zwei Einträge 1 hat, so sind die zugehörigen Zeilen in der unterschiedlichen Mengen I_i.*

Eine Eigenschaft für unimodular

Theorem

Eine Matrix A mit Einträgen aus $\{-1, 0, 1\}$ ist total unimodular, falls

- *nicht mehr als zwei Einträge pro Spalte aus $\{-1, 1\}$ sind und*
- *die Zeilen sich in zwei Mengen I_1 und I_2 aufteilen lassen, für die gilt:*
  - *Falls eine Spalte zwei unterschiedliche Einträge (-1 und 1) enthält, so sind die zugehörigen Zeilen in der gleichen Menge I_i.*
  - *Falls eine Spalte zwei Einträge -1 oder zwei Einträge 1 hat, so sind die zugehörigen Zeilen in der unterschiedlichen Mengen I_i.*

Beweis:

- Beweis erfolgt per Induktion über die Größe der Teilmatrizen.

Eine Eigenschaft für unimodular

primal: $c^T x : Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$, **dual**: $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$

Theorem

Eine Matrix A mit Einträgen aus $\{-1, 0, 1\}$ ist total unimodular, falls

- *nicht mehr als zwei Einträge pro Spalte aus $\{-1, 1\}$ sind und*
- *die Zeilen sich in zwei Mengen I_1 und I_2 aufteilen lassen, für die gilt:*
  - *Falls eine Spalte zwei unterschiedliche Einträge (-1 und 1) enthält, so sind die zugehörigen Zeilen in der gleichen Menge I_i.*
  - *Falls eine Spalte zwei Einträge -1 oder zwei Einträge 1 hat, so sind die zugehörigen Zeilen in der unterschiedlichen Mengen I_i.*

Beweis:

- Beweis erfolgt per Induktion über die Größe der Teilmatrizen.
- Induktionsanfang: eine 1×1 Teilmatrix ist offensichtlich unimodular oder nicht regulär.

Eine Eigenschaft für unimodular

Theorem

Eine Matrix A mit Einträgen aus $\{-1, 0, 1\}$ ist total unimodular, falls

- *nicht mehr als zwei Einträge pro Spalte aus $\{-1, 1\}$ sind und*
- *die Zeilen sich in zwei Mengen I_1 und I_2 aufteilen lassen, für die gilt:*
  - *Falls eine Spalte zwei unterschiedliche Einträge (-1 und 1) enthält, so sind die zugehörigen Zeilen in der gleichen Menge I_i.*
  - *Falls eine Spalte zwei Einträge -1 oder zwei Einträge 1 hat, so sind die zugehörigen Zeilen in der unterschiedlichen Mengen I_i.*

Beweis:

- Beweis erfolgt per Induktion über die Größe der Teilmatrizen.
- Induktionsanfang: eine 1×1 Teilmatrix ist offensichtlich unimodular oder nicht regulär.
- Induktionsannahme: jede nicht reguläre $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

Eine Eigenschaft für unimodular

Theorem

Eine Matrix A mit Einträgen aus $\{-1, 0, 1\}$ ist total unimodular, falls

- *nicht mehr als zwei Einträge pro Spalte aus $\{-1, 1\}$ sind und*
- *die Zeilen sich in zwei Mengen I_1 und I_2 aufteilen lassen, für die gilt:*
  - *Falls eine Spalte zwei unterschiedliche Einträge (-1 und 1) enthält, so sind die zugehörigen Zeilen in der gleichen Menge I_i.*
  - *Falls eine Spalte zwei Einträge -1 oder zwei Einträge 1 hat, so sind die zugehörigen Zeilen in der unterschiedlichen Mengen I_i.*

Beweis:

- Beweis erfolgt per Induktion über die Größe der Teilmatrizen.
- Induktionsanfang: eine 1×1 Teilmatrix ist offensichtlich unimodular oder nicht regulär.
- Induktionsannahme: jede nicht reguläre $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

Beweis

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Sei C eine $k \times k$ Teilmatrix von A.

Beweis

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Sei C eine $k \times k$ Teilmatrix von A.
- Wir müssen zeigen: C ist nicht regulär oder C ist unimodular.

Beweis

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Sei C eine $k \times k$ Teilmatrix von A.
- Wir müssen zeigen: C ist nicht regulär oder C ist unimodular.
  - Falls C eine Spalte enthält, die 0^k ist, so ist C nicht regulär.

Beweis

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Sei C eine $k \times k$ Teilmatrix von A.
- Wir müssen zeigen: C ist nicht regulär oder C ist unimodular.
    - Falls C eine Spalte enthält, die 0^k ist, so ist C nicht regulär.
    - Falls C eine Spalte enthält, die nur einen Eintrag aus $\{-1, 1\}$ enthält, so können wir die Determinante nach dieser Spalte entwickeln.

Beweis

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Sei C eine $k \times k$ Teilmatrix von A.
- Wir müssen zeigen: C ist nicht regulär oder C ist unimodular.
  - Falls C eine Spalte enthält, die 0^k ist, so ist C nicht regulär.
  - Falls C eine Spalte enthält, die nur einen Eintrag aus $\{-1, 1\}$ enthält, so können wir die Determinante nach dieser Spalte entwickeln.
    - Dazu sind die Zeile und Spalte dieses Eintrags zu entfernen und die Determinante der verbleibenden $(k-1) \times (k-1)$ ist zu betrachten.

Beweis

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Sei C eine $k \times k$ Teilmatrix von A.
- Wir müssen zeigen: C ist nicht regulär oder C ist unimodular.
  - Falls C eine Spalte enthält, die 0^k ist, so ist C nicht regulär.
  - Falls C eine Spalte enthält, die nur einen Eintrag aus $\{-1, 1\}$ enthält, so können wir die Determinante nach dieser Spalte entwickeln.
    - Dazu sind die Zeile und Spalte dieses Eintrags zu entfernen und die Determinante der verbleibenden $(k-1) \times (k-1)$ ist zu betrachten.
    - Damit gilt die Behauptung in diesem Fall.

Beweis

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Sei C eine $k \times k$ Teilmatrix von A.
- Wir müssen zeigen: C ist nicht regulär oder C ist unimodular.
  - Falls C eine Spalte enthält, die 0^k ist, so ist C nicht regulär.
  - Falls C eine Spalte enthält, die nur einen Eintrag aus $\{-1, 1\}$ enthält, so können wir die Determinante nach dieser Spalte entwickeln.
    - Dazu sind die Zeile und Spalte dieses Eintrags zu entfernen und die Determinante der verbleibenden $(k-1) \times (k-1)$ ist zu betrachten.
    - Damit gilt die Behauptung in diesem Fall.
  - Falls jede Spalte aus C zwei Einträge enthält, so gilt für jede Spalte j:

Beweis

Induktionsannahme: jede $(k-1)\times(k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Sei C eine $k \times k$ Teilmatrix von A.
- Wir müssen zeigen: C ist nicht regulär oder C ist unimodular.
  - Falls C eine Spalte enthält, die 0^k ist, so ist C nicht regulär.
  - Falls C eine Spalte enthält, die nur einen Eintrag aus $\{-1,1\}$ enthält, so können wir die Determinante nach dieser Spalte entwickeln.
    - Dazu sind die Zeile und Spalte dieses Eintrags zu entfernen und die Determinante der verbleibenden $(k-1)\times(k-1)$ ist zu betrachten.
    - Damit gilt die Behauptung in diesem Fall.
  - Falls jede Spalte aus C zwei Einträge enthält, so gilt für jede Spalte j:
    - $\sum_{i\in I_1} a_{i,j} = \sum_{i\in I_2} a_{i,j}$.

Beweis

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Sei C eine $k \times k$ Teilmatrix von A.
- Wir müssen zeigen: C ist nicht regulär oder C ist unimodular.
  - Falls C eine Spalte enthält, die 0^k ist, so ist C nicht regulär.
  - Falls C eine Spalte enthält, die nur einen Eintrag aus $\{-1, 1\}$ enthält, so können wir die Determinante nach dieser Spalte entwickeln.
    - Dazu sind die Zeile und Spalte dieses Eintrags zu entfernen und die Determinante der verbleibenden $(k-1) \times (k-1)$ ist zu betrachten.
    - Damit gilt die Behauptung in diesem Fall.
  - Falls jede Spalte aus C zwei Einträge enthält, so gilt für jede Spalte j:
    - $\sum_{i \in I_1} a_{i,j} = \sum_{i \in I_2} a_{i,j}$.
    - Damit können wir die Zeilenvektoren aus I_1 aufsummieren und die aus I_2 subtrahieren.

Beweis

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Sei C eine $k \times k$ Teilmatrix von A.
- Wir müssen zeigen: C ist nicht regulär oder C ist unimodular.
    - Falls C eine Spalte enthält, die 0^k ist, so ist C nicht regulär.
    - Falls C eine Spalte enthält, die nur einen Eintrag aus $\{-1, 1\}$ enthält, so können wir die Determinante nach dieser Spalte entwickeln.
        - Dazu sind die Zeile und Spalte dieses Eintrags zu entfernen und die Determinante der verbleibenden $(k-1) \times (k-1)$ ist zu betrachten.
        - Damit gilt die Behauptung in diesem Fall.
    - Falls jede Spalte aus C zwei Einträge enthält, so gilt für jede Spalte j:
        - $\sum_{i \in I_1} a_{i,j} = \sum_{i \in I_2} a_{i,j}$.
        - Damit können wir die Zeilenvektoren aus I_1 aufsummieren und die aus I_2 subtrahieren.
        - Das Ergebnis ist ein Nullvektor. Damit ist C nicht regulär.

Beweis

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Sei C eine $k \times k$ Teilmatrix von A.
- Wir müssen zeigen: C ist nicht regulär oder C ist unimodular.
  - Falls C eine Spalte enthält, die 0^k ist, so ist C nicht regulär.
  - Falls C eine Spalte enthält, die nur einen Eintrag aus $\{-1, 1\}$ enthält, so können wir die Determinante nach dieser Spalte entwickeln.
    - Dazu sind die Zeile und Spalte dieses Eintrags zu entfernen und die Determinante der verbleibenden $(k-1) \times (k-1)$ ist zu betrachten.
    - Damit gilt die Behauptung in diesem Fall.
  - Falls jede Spalte aus C zwei Einträge enthält, so gilt für jede Spalte j:
    - $\sum_{i \in I_1} a_{i,j} = \sum_{i \in I_2} a_{i,j}$.
    - Damit können wir die Zeilenvektoren aus I_1 aufsummieren und die aus I_2 subtrahieren.
    - Das Ergebnis ist ein Nullvektor. Damit ist C nicht regulär.

Inzidenzmatrix

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Die Inzidenzmatrix eines Graphen hat folgende Gestalt:

Inzidenzmatrix

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Die Inzidenzmatrix eines Graphen hat folgende Gestalt:
  - Für jeden Knoten gibt es eine Zeile.

Inzidenzmatrix

Induktionsannahme: jede $(k-1)\times(k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Die Inzidenzmatrix eines Graphen hat folgende Gestalt:
  - Für jeden Knoten gibt es eine Zeile.
  - Für jede Kante gibt es eine Spalte.

Inzidenzmatrix

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Die Inzidenzmatrix eines Graphen hat folgende Gestalt:
  - Für jeden Knoten gibt es eine Zeile.
  - Für jede Kante gibt es eine Spalte.
  - Eine 1 besagt: die ungerichtete Kante ist zu dem Knoten inzident.

Inzidenzmatrix

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Die Inzidenzmatrix eines Graphen hat folgende Gestalt:
  - Für jeden Knoten gibt es eine Zeile.
  - Für jede Kante gibt es eine Spalte.
  - Eine 1 besagt: die ungerichtete Kante ist zu dem Knoten inzident.
  - Eine 1 besagt: die gerichtete Kante endet in dem Knoten.

Inzidenzmatrix

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Die Inzidenzmatrix eines Graphen hat folgende Gestalt:
  - Für jeden Knoten gibt es eine Zeile.
  - Für jede Kante gibt es eine Spalte.
  - Eine 1 besagt: die ungerichtete Kante ist zu dem Knoten inzident.
  - Eine 1 besagt: die gerichtete Kante endet in dem Knoten.
  - Eine -1 besagt: die gerichtete Kante startet in dem Knoten.

Inzidenzmatrix

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Die Inzidenzmatrix eines Graphen hat folgende Gestalt:
  - Für jeden Knoten gibt es eine Zeile.
  - Für jede Kante gibt es eine Spalte.
  - Eine 1 besagt: die ungerichtete Kante ist zu dem Knoten inzident.
  - Eine 1 besagt: die gerichtete Kante endet in dem Knoten.
  - Eine -1 besagt: die gerichtete Kante startet in dem Knoten.
- Die Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen genügt den obigen Bedingungen:

Inzidenzmatrix

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Die Inzidenzmatrix eines Graphen hat folgende Gestalt:
  - Für jeden Knoten gibt es eine Zeile.
  - Für jede Kante gibt es eine Spalte.
  - Eine 1 besagt: die ungerichtete Kante ist zu dem Knoten inzident.
  - Eine 1 besagt: die gerichtete Kante endet in dem Knoten.
  - Eine -1 besagt: die gerichtete Kante startet in dem Knoten.
- Die Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen genügt den obigen Bedingungen:
  - Alle Zeilen gehören hier zur Menge I_1.

Inzidenzmatrix

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Die Inzidenzmatrix eines Graphen hat folgende Gestalt:
  - Für jeden Knoten gibt es eine Zeile.
  - Für jede Kante gibt es eine Spalte.
  - Eine 1 besagt: die ungerichtete Kante ist zu dem Knoten inzident.
  - Eine 1 besagt: die gerichtete Kante endet in dem Knoten.
  - Eine -1 besagt: die gerichtete Kante startet in dem Knoten.
- Die Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen genügt den obigen Bedingungen:
  - Alle Zeilen gehören hier zur Menge I_1.
- Die Inzidenzmatrix eines ungerichteten bipartiten Graphen (V, W, E) genügt den obigen Bedingungen:

Inzidenzmatrix

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Die Inzidenzmatrix eines Graphen hat folgende Gestalt:
  - Für jeden Knoten gibt es eine Zeile.
  - Für jede Kante gibt es eine Spalte.
  - Eine 1 besagt: die ungerichtete Kante ist zu dem Knoten inzident.
  - Eine 1 besagt: die gerichtete Kante endet in dem Knoten.
  - Eine -1 besagt: die gerichtete Kante startet in dem Knoten.
- Die Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen genügt den obigen Bedingungen:
  - Alle Zeilen gehören hier zur Menge I_1.
- Die Inzidenzmatrix eines ungerichteten bipartiten Graphen (V, W, E) genügt den obigen Bedingungen:
  - Alle Zeilen die Knoten aus V repräsentieren gehören zur Menge I_1.

Inzidenzmatrix

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Die Inzidenzmatrix eines Graphen hat folgende Gestalt:
  - Für jeden Knoten gibt es eine Zeile.
  - Für jede Kante gibt es eine Spalte.
  - Eine 1 besagt: die ungerichtete Kante ist zu dem Knoten inzident.
  - Eine 1 besagt: die gerichtete Kante endet in dem Knoten.
  - Eine -1 besagt: die gerichtete Kante startet in dem Knoten.
- Die Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen genügt den obigen Bedingungen:
  - Alle Zeilen gehören hier zur Menge I_1.
- Die Inzidenzmatrix eines ungerichteten bipartiten Graphen (V, W, E) genügt den obigen Bedingungen:
  - Alle Zeilen die Knoten aus V repräsentieren gehören zur Menge I_1.
  - Alle Zeilen die Knoten aus W repräsentieren gehören zur Menge I_2.

Inzidenzmatrix

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Die Inzidenzmatrix eines Graphen hat folgende Gestalt:
  - Für jeden Knoten gibt es eine Zeile.
  - Für jede Kante gibt es eine Spalte.
  - Eine 1 besagt: die ungerichtete Kante ist zu dem Knoten inzident.
  - Eine 1 besagt: die gerichtete Kante endet in dem Knoten.
  - Eine -1 besagt: die gerichtete Kante startet in dem Knoten.
- Die Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen genügt den obigen Bedingungen:
  - Alle Zeilen gehören hier zur Menge I_1.
- Die Inzidenzmatrix eines ungerichteten bipartiten Graphen (V, W, E) genügt den obigen Bedingungen:
  - Alle Zeilen die Knoten aus V repräsentieren gehören zur Menge I_1.
  - Alle Zeilen die Knoten aus W repräsentieren gehören zur Menge I_2.

Folgerungen

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

Lemma

Ein LP in Standardform oder in kanonischer Form hat nur ganzzahlige Basislösungen, falls die Nebenbedingungsmatrix

Folgerungen

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

Lemma

Ein LP in Standardform oder in kanonischer Form hat nur ganzzahlige Basislösungen, falls die Nebenbedingungsmatrix

- *der Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen oder*

Folgerungen

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

Lemma

Ein LP in Standardform oder in kanonischer Form hat nur ganzzahlige Basislösungen, falls die Nebenbedingungsmatrix

- *der Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen oder*
- *der Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphen entspricht.*

Folgerungen

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

Lemma

Ein LP in Standardform oder in kanonischer Form hat nur ganzzahlige Basislösungen, falls die Nebenbedingungsmatrix

- *der Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen oder*
- *der Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphen entspricht.*

Folgerungen

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

Lemma

Ein LP in Standardform oder in kanonischer Form hat nur ganzzahlige Basislösungen, falls die Nebenbedingungsmatrix

- *der Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen oder*
- *der Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphen entspricht.*

Damit liefen die relaxierten LP-Formulierungen eine ganzzahlige optimale Lösung für:

- maximalen Fluss,

Folgerungen

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

Lemma

Ein LP in Standardform oder in kanonischer Form hat nur ganzzahlige Basislösungen, falls die Nebenbedingungsmatrix

- *der Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen oder*
- *der Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphen entspricht.*

Damit liefen die relaxierten LP-Formulierungen eine ganzzahlige optimale Lösung für:

- maximalen Fluss,
- kürzester Weg,

Folgerungen

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

Lemma

Ein LP in Standardform oder in kanonischer Form hat nur ganzzahlige Basislösungen, falls die Nebenbedingungsmatrix

- *der Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen oder*
- *der Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphen entspricht.*

Damit liefen die relaxierten LP-Formulierungen eine ganzzahlige optimale Lösung für:

- maximalen Fluss,
- kürzester Weg,
- gewichtetes bipartites Matching, und

Folgerungen

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

Lemma

Ein LP in Standardform oder in kanonischer Form hat nur ganzzahlige Basislösungen, falls die Nebenbedingungsmatrix

- *der Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen oder*
- *der Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphen entspricht.*

Damit liefen die relaxierten LP-Formulierungen eine ganzzahlige optimale Lösung für:

- maximalen Fluss,
- kürzester Weg,
- gewichtetes bipartites Matching, und
- bipartites Vertex-Cover.

Folgerungen

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

Lemma

Ein LP in Standardform oder in kanonischer Form hat nur ganzzahlige Basislösungen, falls die Nebenbedingungsmatrix

- *der Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen oder*
- *der Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphen entspricht.*

Damit liefen die relaxierten LP-Formulierungen eine ganzzahlige optimale Lösung für:

- maximalen Fluss,
- kürzester Weg,
- gewichtetes bipartites Matching, und
- bipartites Vertex-Cover.

Bemerkungen

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Damit folgt auch die Dualität des Matchings und des Vertex-Cover auf bipartiten Graphen.

Bemerkungen

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Damit folgt auch die Dualität des Matchings und des Vertex-Cover auf bipartiten Graphen.
- Betrachte folgende Matrix (Inzidenzmatrix von K_3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkungen

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Damit folgt auch die Dualität des Matchings und des Vertex-Cover auf bipartiten Graphen.
- Betrachte folgende Matrix (Inzidenzmatrix von K_3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Die Determinante dieser Matrix ist 2.

Bemerkungen

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Damit folgt auch die Dualität des Matchings und des Vertex-Cover auf bipartiten Graphen.
- Betrachte folgende Matrix (Inzidenzmatrix von K_3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Die Determinante dieser Matrix ist 2.
- Der zugehörige Graph K_3 hat nur ein Matching der Größe 1.

Bemerkungen

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Damit folgt auch die Dualität des Matchings und des Vertex-Cover auf bipartiten Graphen.
- Betrachte folgende Matrix (Inzidenzmatrix von K_3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Die Determinante dieser Matrix ist 2.
- Der zugehörige Graph K_3 hat nur ein Matching der Größe 1.
- Das relaxierte Matching hat aber einen Wert von $3/2$.

Bemerkungen

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Damit folgt auch die Dualität des Matchings und des Vertex-Cover auf bipartiten Graphen.
- Betrachte folgende Matrix (Inzidenzmatrix von K_3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Die Determinante dieser Matrix ist 2.
- Der zugehörige Graph K_3 hat nur ein Matching der Größe 1.
- Das relaxierte Matching hat aber einen Wert von $3/2$.
- Dazu wird jede Kante zur Hälfte gematcht.

Bemerkungen

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- Damit folgt auch die Dualität des Matchings und des Vertex-Cover auf bipartiten Graphen.
- Betrachte folgende Matrix (Inzidenzmatrix von K_3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Die Determinante dieser Matrix ist 2.
- Der zugehörige Graph K_3 hat nur ein Matching der Größe 1.
- Das relaxierte Matching hat aber einen Wert von $3/2$.
- Dazu wird jede Kante zur Hälfte gematcht.

Literatur

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- B. Korte, J. Vygen. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms, 2nd Edition, Springer, 2002.

Literatur

- B. Korte, J. Vygen. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms, 2nd Edition, Springer, 2002.
- E. Lawler. Combinatorial Optimization: Networks and Matroids. Dover Publications, 1976.

Literatur

- B. Korte, J. Vygen. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms, 2nd Edition, Springer, 2002.
- E. Lawler. Combinatorial Optimization: Networks and Matroids. Dover Publications, 1976.
- C. Papadimitriou und K. Steiglitz. Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity. Prentice Hall, 1982.

Literatur

Induktionsannahme: jede $(k-1) \times (k-1)$ Teilmatrix sei unimodular.

- B. Korte, J. Vygen. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms, 2nd Edition, Springer, 2002.
- E. Lawler. Combinatorial Optimization: Networks and Matroids. Dover Publications, 1976.
- C. Papadimitriou und K. Steiglitz. Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity. Prentice Hall, 1982.
- A. Schrijver. Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency. Springer, 2003.

Literatur

- B. Korte, J. Vygen. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms, 2nd Edition, Springer, 2002.
- E. Lawler. Combinatorial Optimization: Networks and Matroids. Dover Publications, 1976.
- C. Papadimitriou und K. Steiglitz. Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity. Prentice Hall, 1982.
- A. Schrijver. Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency. Springer, 2003.