Lehrstuhl für Informatik 1
Prof. Dr. Berthold Vöcking
Melanie Winkler
Oliver Göbel
Sascha Geulen WS 2011/12

Übung zur Vorlesung
Berechenbarkeit und Komplexität
Lösung Globalübung 1

Aufgabe 6

SetCover ist das folgende Entscheidungsproblem:

Eingabe: Eine Menge U, k Teilmengen $M_1, \ldots, M_k \subseteq U$ mit Gewichten $w_1, \ldots, w_k \in \mathbb{N}$ und eine Zahl $b \in \mathbb{N}$.

Ausgabe: Ja, gdw. es eine Auswahl von Teilmengen mit Gesamtgewicht höchstens b gibt, die U abdecken. Formal: Es gibt eine Indexmenge $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ mit $\sum_{i \in I} w_i \leq b$ und $\bigcup_{i \in I} M_i = U$.

Zeigen Sie durch Reduktion von dem NP-vollständigen Problem VertexCover, dass SetCover ebenfalls NP-vollständig ist.

Zur Erinnerung: Ein Vertex Cover V' in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge $V' \subseteq V$ der Knoten, so dass für jede Kante $e = (u, v) \in E$ mindestens einer ihrer Endpunkte in V' ist, d.h. $u \in V'$ oder $v \in V'$.

1) Zuerst zeigen wir durch Angabe eines Zertifikates und eines Polynomialzeitverifizierers, dass SetCover in NP ist:

   Zertifikat:

   Als Zertifikat verwenden wir die Indexmenge I. I kann als ein Bitstring der Länge k kodiert werden und ist damit polynomiell in der Eingabelänge beschränkt.

   Verifizierer:

   (1) Überprüfe, ob $\bigcup_{i \in I} M_i = U$:
      * Starte dazu mit einem Bitstring, der aus $|U|$ vielen Nullen besteht.
      * Laufe über jede Teilmenge M_i mit $i \in I$ und setze für jedes $m \in M_i$ das dazugehörige Bit im Bitstring auf Eins.
      * Überprüfe, ob der Bitstring nun aus $|U|$ vielen Einsen besteht.

   (2) Überprüfe, ob $\sum_{i \in I} w_i \leq b$, durch Aufsummieren aller w_i mit $i \in I$.

   Laufzeit:

   Die Initialisierung des Bitstrings benötigt Laufzeit $O(|U|)$. Da jedes M_i aus maximal $|U|$ vielen Elementen besteht und die Eingabe k viele Teilmengen enthält, ist die Laufzeit des ersten Schrittes somit durch $O(k^2 \, |U|^2)$ beschränkt. Sei W das maximale Gewicht, d.h. $W = \max_{i=1,\ldots,k} w_i$. Dann benötigt der zweite Schritt höchstens eine Laufzeit von $O(k^2 \log(W))$. Damit ist die Laufzeit polynomiell in der Eingabelänge beschränkt.

2) Nun zeigen wir durch eine Reduktion von dem NP-vollständigen Problem VERTEX-COVER, dass SETCOVER NP-hart ist.

Konstruktion:

Wir berechnen wie folgt aus einer Eingabe für VERTEXCOVER, bestehend aus einem Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \dots, v_N\}$ und einer Zahl b, eine Instanz für SETCOVER:

Wir setzen $U := E$, $k := N$, $M_i = \{e \in E \mid v_i \text{ ist Endpunkt von } e\}$ für $i = 1, \dots, N$ und $w_i = 1$ für $i = 1, \dots, N$. Die Zahl b wird unverändert übernommen.

Laufzeit:

Die Konstruktion der Instanz für SETCOVER benötigt Laufzeit $O(|V| + |E|^2)$ und ist damit polynomiell in der Eingabelänge beschränkt.

Korrektheit:

Angenommen, die VERTEXCOVER-Instanz (G, b) ist lösbar, d.h. G hat ein Vertex Cover V' der Größe höchstens b. Dann gibt es eine Indexmenge I der Größe höchstens b, so dass $\bigcup_{i \in I} v_i = V'$ ein Vertex Cover ist. Damit gilt auch $\bigcup_{i \in I}\{e \in E \mid v_i \text{ ist Endpunkt von } e\} = E$. Gemäß der Konstruktion ist nun auch $\bigcup_{i \in I} M_i = E$. Jede Teilmenge M_i hat ein Gewicht von $w_i = 1$. Damit gilt $\sum_{i \in I} w_i \leq b$. Da $U = E$ gilt, ist somit die Indexmenge I eine Lösung der konstruierten SETCOVER-Instanz.

Angenommen, die SETCOVER-Instanz $(U, M_1, \dots M_N, w_1, \dots, w_N, b)$ ist lösbar,d.h. es gibt eine Indexmenge I, so dass $\sum_{i \in I} w_i \leq b$ und $\bigcup_{i \in I} M_i = U$. Da $w_i = 1$ für alle $i = 1, \dots N$ gilt, ist die Größe von I durch b beschränkt. Gemäß der Konstruktion ist nun auch $\bigcup_{i \in I}\{e \in E \mid v_i \text{ ist Endpunkt von } e\} = U$. Da $U = E$ gilt, ist somit $\{v_i \mid i \in I\}$ ein Vertex Cover der Größe höchstens b.

Daraus folgt, dass SETCOVER NP-vollständig ist.