Lehrstuhl für Informatik 1
Prof. Dr. Berthold Vöcking
Melanie Winkler
Oliver Göbel
Sascha Geulen

WS 2011/12
24.01.2012

Übung zur Vorlesung
Berechenbarkeit und Komplexität

Globalübung 1

Aufgabe 1

(a) Was ist ein Hamiltonkreis?

(b) Definieren Sie das ungerichtete Hamiltonkreis-Problem (HC).

(c) Definieren Sie die Entscheidungsvariante des Traveling-Salesperson-Problems (TSP).

(d) Beschreiben Sie eine polynomielle Reduktion HC $\leq_p$ TSP.

Aufgabe 2

(a) Definieren Sie das Entscheidungsproblem Subset-Sum.

(b) Definieren Sie das Entscheidungsproblem KP-E des Rucksackproblems.

(c) Beschreiben Sie eine polynomielle Reduktion Subset-Sum $\leq_p$ KP-E und beweisen Sie ihre Korrektheit.

Aufgabe 3

Das Teilgraphisomorphie-Problem ist wie folgt definiert:
Eingabe: Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$.
Frage: Enthält G_1 den Graphen G_2 als isomorphen Teilgraphen?
(Erläuterung: G_2 ist ein isomorpher Teilgraph von G_1, wenn eine injektive Abbildung $\alpha : V_2 \to V_1$ existiert mit $\{v, v'\} \in E_2 \Rightarrow \{\alpha(v), \alpha(v')\} \in E_1$.)

Zeigen Sie durch Reduktion des NP-harten Problems Clique auf das Teilgraphisomorphie-Problem, dass dieses ebenfalls NP-hart ist. Beweisen Sie insbesondere auch die Korrektheit.

Aufgabe 4

(a) Definieren Sie das Entscheidungsproblem PARTITION.

(b) Das ROUTENPLANERPROBLEM ist das folgende Optimierungsproblem:

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$, zwei Funktionen $t : E \to \mathbb{N}$ (Zeit) und $c : E \to \mathbb{N}$ (Kosten), ein Zeitlimit T und ein Startknoten s sowie ein Zielknoten z.

zulässige Lösungen: Jeder Pfad P von s nach z in G mit Gesamtzeit $\sum_{e \in P} t(e) \leq T$.

Zielfunktion: Minimiere die Kosten des Pfades P, d.h. minimiere $\sum_{e \in P} c(e)$.

Zeigen Sie die NP-Härte des Routenplanerproblems, indem Sie zunächst eine Entscheidungsvariante davon formulieren und dann eine polynomielle Reduktion von PARTITION auf diese angeben.

Aufgabe 5

(a) 3-AUFTEILEN ist das folgende Entscheidungsproblem:
Eingabe: Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$.
Ausgabe: Ja, genau dann wenn es disjunkte Mengen $I, J, K \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $I \cup J \cup K = \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} a_j = \sum_{k \in K} a_k.$$

(Das bekannte Problem PARTITION kann also auch als 2-AUFTEILEN aufgefasst werden.)
Zeigen Sie, dass PARTITION $\leq_p$ 3-AUFTEILEN gilt. Geben Sie eine entsprechende Konstruktion und deren Korrektheit an.

(b) Gilt auch 3-AUFTEILEN $\leq_p$ PARTITION? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6

SETCOVER ist das folgende Entscheidungsproblem:

Eingabe: Eine Menge U, k Teilmengen $M_1, \ldots, M_k \subseteq U$ mit Gewichten $w_1, \ldots, w_k \in \mathbb{N}$ und eine Zahl $b \in \mathbb{N}$.

Ausgabe: Ja, gdw. es eine Auswahl von Teilmengen mit Gesamtgewicht höchstens b gibt, die U abdecken. Formal: Es gibt eine Indexmenge $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ mit $\sum_{i \in I} w_i \leq b$ und $\bigcup_{i \in I} M_i = U$.

Zeigen Sie durch Reduktion von dem NP-vollständigen Problem VERTEXCOVER, dass SETCOVER ebenfalls NP-vollständig ist.

Diese Übung wird am Dienstag, den 24.1.2012 besprochen.